

УДК 539.3

С.В. ФИЛИПКОВСКИЙ¹, Л.А. ФИЛИПКОВСКАЯ²¹ Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Украина² Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО РОТОРА С ДИСКОМ НА КОНСОЛЬНОМ КОНЦЕ И ШАРИКОПОДШИПНИКОВ В ВИБРИРУЮЩЕМ ПЛАНЕРЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Построена нелинейная конечноэлементная модель упругого ротора на шарикоподшипниках. Исследованы нелинейные колебания ротора, когда прогибы вала и деформации подшипников одного порядка, колебания вызываются одновременным действием дисбаланса и вибрации опор, частота вращения ротора и частота вибрации опор одного порядка. Проанализированы устойчивость и бифуркации вынужденных колебаний ротора. Совместное действие дисбаланса и вибрации опор вызывает резонансы и супер-резонансы по основной форме колебаний ротора. На неустойчивых режимах у ротора с диском на консольном конце происходит переход к хаотическим колебаниям с малым размахом.

Ключевые слова: вал, диск, дисбаланс, шарикоподшипник, вибрация опор, резонанс, бифуркация.

Введение

Для современных летательных аппаратов (ЛА) характерны большие мощности источников вибрации, малые масса и жесткость планера. Это приводит к нелинейным динамическим процессам в наиболее нагруженных узлах и агрегатах. В ЛА повсеместно используются устройства, в которых есть роторы на шарикоподшипниках. Это приборы с гироскопами, агрегаты с электродвигателями, генераторами и турбохолодильниками в самолетах, приборы с гироскопами и агрегаты систем управления. Нелинейность упругих характеристик этих систем обусловлена как контактными напряжениями, так и зазорами между шариками и канавками качения в шарикоподшипниках.

Д.В. Хронин [1] показал, что при колебаниях роторов агрегатов летательных аппаратов прогибы вала одного порядка с упругими деформациями подшипников. Если необходимо избежать раскрытия зазоров между шариками и канавками качения, которое приводит к ударным нагрузкам, применяют радиально-упорные шарикоподшипники с предварительным натягом. В статье [2] проанализированы нелинейные колебания упруго деформируемого вала, закрепленного на двух радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительным натягом, с учетом волнистости канавок качения и шариков.

Роторы, в которых лопаточное колесо или маховик закреплены на консольном конце, имеют такое соотношение диаметра вала и

расстояния между подшипниками, что должны быть представлены моделью упругого вала на упругих опорах. Причиной колебаний роторов обычно считают дисбаланс или несовершенства и износ подшипников. ЛА, как правило, содержит несколько двигателей и других устройств, вызывающих вибрации корпуса, а диапазон их частот достаточно широк. В ЛА вибрации передаются к узлам крепления агрегатов и приборов как по силовому набору, так и колебаниями воздуха, которые воздействуют на обшивку в той зоне, где установлен агрегат. Частоты вращения роторов исследуемых приборов и агрегатов находятся в диапазоне частоты вибрации планера ЛА. Их совместное действие может привести к еще не исследованным явлениям.

El-Saeidy [3] рассмотрел 37 работ, в которых исследовано влияние вибрации основания на динамику и устойчивость ротора на подшипниках. Ротор, который состоит из диска на безмассовом валу, подвержен дисбалансу и воздействиям со стороны основания, но в этой работе исследованы колебания на опорах с кубической нелинейностью, а не на шарикоподшипниках.

Целью исследований является разработка численной модели и метода для исследования влияния вибрации опор на колебания упругого ротора, установленного на радиально-упорных шарикоподшипниках с осевым натягом.

1. Математическая модель

Форму изогнутой оси вала с диском на консольном конце сложно описать одной функци-

ей, поэтому применен метод конечных элементов (МКЭ). Конечноэлементная модель ротора показана на рис. 1. Участки вала постоянного сечения являются конечными элементами. В тех сечениях вала, в которых закреплены диски или установлены опоры, помещаем узлы. Силы и моменты сил инерции диска, а также упругие реакции подшипников будем учитывать как граничные условия в соответствующем узле.

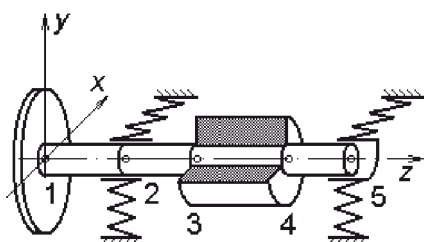


Рис. 1. Конечные элементы ротора и узлы на концах элементов (1 – 5)

Зависимости компонент упругих реакций подшипника от перемещений цапфы вала вдоль осей x , y , z описаны в работе [4]:

$$\begin{aligned}
 P_{xi} &= K \sum_{v=1}^{N_B} [x_i \cos \alpha \cos \beta_v + y_i \cos \alpha \sin \beta_v + \\
 &+ (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \cos \beta_v, \\
 P_{yi} &= K \sum_{v=1}^{N_B} [x_i \cos \alpha \cos \beta_v + y_i \cos \alpha \sin \beta_v + \\
 &+ (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \sin \beta_v, \\
 P_{zi} &= K \sum_{v=1}^{N_B} [x_i \cos \alpha \cos \beta_v + y_i \cos \alpha \sin \beta_v + \\
 &+ (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \sin \alpha,
 \end{aligned} \quad (1)$$

где $K = (3P_0/2N_B)z_0^{-3/2} \sin \alpha^{-5/2}$;

x_i , y_i , z – перемещения центра внутреннего кольца относительно центра наружного кольца;

v и N_B – номер и количество шариков;

$i = \overline{1,2}$ – номера цапф вала;

α и β_v – угол контакта и угол азимута шарика с номером относительно оси x ;

P_0 – сила предварительного осевого натяга,

z_0 – осевое смещение внутреннего кольца относительно внешнего кольца от действия силы P_0 .

2. Уравнения колебаний ротора

Свободные колебания вала постоянного сечения описываются следующими уравнениями [5]:

$$\begin{aligned}
 EI \frac{\partial^4 u_x}{\partial \zeta^4} + \rho S \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0, \\
 EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial \zeta^4} + \rho S \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0.
 \end{aligned} \quad (2)$$

где I и S – диаметральный момент инерции и площадь сечения вала,

E и ρ – модуль упругости и плотность материала вала.

ζ – координата сечения вала по оси z , t – время.

Координатные оси направлены, как показано на рис. 1. Обобщенные координаты, которыми являются элементы вектора узловых значений i -го узла, располагаем в следующем порядке: $u_{i,1} = u_{i,x}$, $u_{i,2} = \theta_{i,y}$, $u_{i,3} = u_{i,y}$, $u_{i,4} = \theta_{i,x}$, $u_{i,5} = u_{i,z}$. Интерполяционными полиномами конечного элемента являются функции изогнутой оси балки при единичных перемещениях узловых сечений [6]:

$$\begin{aligned}
 N_{e,1}(\zeta) &= 1 - 3(\zeta/l)^2 + 2(\zeta/l)^3, \\
 N_{e,2}(\zeta) &= l \left[\zeta/l - 2(\zeta/l)^2 + (\zeta/l)^3 \right], \\
 N_{e,3}(\zeta) &= 3(\zeta/l)^2 - 2(\zeta/l)^3, \\
 N_{e,4}(\zeta) &= l \left[(\zeta/l)^3 - (\zeta/l)^2 \right],
 \end{aligned} \quad (3)$$

где l – длина элемента. Прогибы конечного элемента между узлами $i, i+1$ определены полиномами

$$u_x = N_{e,1}u_{i,1} + N_{e,2}u_{i,2} + N_{e,3}u_{i+1,1} + N_{e,4}u_{i+1,2},$$

$$u_y = N_{e,1}u_{i,3} + N_{e,2}u_{i,4} + N_{e,3}u_{i+1,3} + N_{e,4}u_{i+1,4}, \quad (4)$$

Значения $u_{i,z}$ зависят только от времени потому, что вал не деформируется вдоль оси вращения.

Уравнения колебаний вала получены методом Галеркина при одновременной аппроксимации уравнений и граничных условий [7]

$$\int_O W_e R_O dO + \int_{\Gamma} W_e R_{\Gamma} d\Gamma = 0, \quad (5)$$

где R_O и R_{Γ} – невязки решения уравнения и граничных условий,

W_e и \bar{W}_e – весовые функции в области и на границе,

e – номер конечного элемента. Подставив (2), (3) и (4) в первый интеграл (5), получим следующие интегралы по длине элемента:

$$\int_0^1 N_e^T \left(EI \frac{\partial^4 u_x}{\partial \zeta^4} + \rho S \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right) d\zeta, \\ \int_0^1 N_e^T \left(EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial \zeta^4} + \rho S \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \right) d\zeta, \quad (6)$$

где N_e – вектор-строка интерполяционных функций. Выполняя в (6) интегрирование по частям для слагаемых, содержащих производные по координате ζ , получим

$$\int_0^1 N_e^T \left(EI \frac{\partial^4 u_x}{\partial \zeta^4} \right) d\zeta = K_e [u_{i,1} \quad u_{i,2} \quad u_{i+1,1} \quad u_{i+1,2}]^T \\ \int_0^1 N_e^T \left(EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial \zeta^4} \right) d\zeta = K_e [u_{i,3} \quad u_{i,4} \quad u_{i+1,3} \quad u_{i+1,4}]^T, \quad (7)$$

где K_e – матрица жесткости конечного элемента для прогибов. Выполняя в (6) интегрирование для слагаемых с производными по времени получим

$$\int_0^1 N_e^T \left(\rho S \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right) d\zeta = M_e [\ddot{u}_{i,1} \quad \ddot{u}_{i,2} \quad \ddot{u}_{i+1,1} \quad \ddot{u}_{i+1,2}]^T, \\ \int_0^1 N_e^T \left(\rho S \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \right) d\zeta = M_e [\ddot{u}_{i,3} \quad \ddot{u}_{i,4} \quad \ddot{u}_{i+1,3} \quad \ddot{u}_{i+1,4}]^T, \quad (8)$$

где M_e – матрица масс конечного элемента для прогибов. Элементы строк и столбцов матриц, соответствующие перемещению u_z , будут нулевыми кроме диагонального элемента матрицы масс, который будет равен массе конечного элемента.

Первым граничным условием на конце вала с диском является равенство изгибающего момента моменту сил инерции диска

$$\left[EI \frac{\partial^2 u_x}{\partial \zeta^2} + I_1 \frac{\partial^3 u_x}{\partial \zeta \partial t^2} + I_0 \Omega \frac{\partial^2 u_y}{\partial \zeta \partial t} \right]_{\zeta=0} = 0, \\ \left[EI \frac{\partial^2 u_y}{\partial \zeta^2} + I_1 \frac{\partial^3 u_y}{\partial \zeta \partial t^2} - I_0 \Omega \frac{\partial^2 u_x}{\partial \zeta \partial t} \right]_{\zeta=0} = 0, \quad (9)$$

где I_1 и I_0 – диаметральный и полярный моменты инерции диска,

Ω – угловая скорость ротора.

Подставив (3), (4), (9) и $\zeta = 0$ во второй интеграл (5) получим добавку к матрице масс

M_{11} и матрицу гироскопических моментов G_1 для степеней свободы соответствующего узла

$$N_e^T I_1 \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial \zeta \partial t^2} \right)_{\zeta=0} + N_e^T I_1 \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial \zeta \partial t^2} \right)_{\zeta=0} = \\ = M_{11} [\dot{u}_{1,1} \quad \ddot{u}_{1,2} \quad \ddot{u}_{1,3} \quad \ddot{u}_{1,4}]^T, \quad (10)$$

$$N_e^T I_0 \Omega \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial \zeta \partial t} \right)_{\zeta=0} + N_e^T I_0 \Omega \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial \zeta \partial t} \right)_{\zeta=0} = \\ = G_1 [\dot{u}_{1,1} \quad \dot{u}_{1,2} \quad \dot{u}_{1,3} \quad \dot{u}_{1,4}]^T, \quad (11)$$

Вторым граничным условием на конце вала с диском является равенство поперечной силы силе инерции диска. Если диск закреплен на валу с эксцентриситетом a , то условие запишется:

$$\left[EI \frac{\partial^3 u_x}{\partial \zeta^3} + m_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right]_{\zeta=0} - m_0 a \Omega^2 \cos \Omega t = 0, \\ \left[EI \frac{\partial^3 u_y}{\partial \zeta^3} + m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \right]_{\zeta=0} - m_0 a \Omega^2 \sin \Omega t = 0. \quad (12)$$

где m_0 – масса диска. Подставив (3), (4), (12) и $\zeta = 0$ во второй интеграл (5) получим добавку к матрице масс M_{ml} и вектор правой части уравнений колебаний $H_{D1}(\Omega, t)$, который обусловлен дисбалансом диска

$$H_{D1}(\Omega, t) = m_0 a \Omega^2 [\cos \Omega t \quad 0 \quad \sin \Omega t \quad 0]^T \quad (13)$$

$$N_e^T m_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \Big|_{\zeta=0} + N_e^T m_0 \frac{\partial^3 u_y}{\partial t^2} \Big|_{\zeta=0} = \\ = M_{ml} [\ddot{u}_{1,1} \quad \ddot{u}_{1,2} \quad \ddot{u}_{1,3} \quad \ddot{u}_{1,4}]^T. \quad (14)$$

Если i -й узел закреплен в подшипнике, в котором силы упругости представлены зависимостями (1) и силы трения представлены вязким демпфированием, то граничные условия в нем по осям x, y будут иметь вид

$$-EI \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial \zeta^3} \right)_i + EI \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial \zeta^3} \right)_{i+1} - \\ -P_{x1}(u_x, u_y, u_z) - C \dot{u}_{x,i} = 0 \\ -EI \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial \zeta^3} \right)_i + EI \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial \zeta^3} \right)_{i+1} - \\ -P_{y1}(u_x, u_y, u_z) - C \dot{u}_{y,i} = 0, \quad (15)$$

где C – коэффициент демпфирования,

$\dot{u}_{x,i}, \dot{u}_{y,i}$ – скорости узловых сечений.

Подставив (3), (4), (15) и $\zeta = 0$, в случае левого узла элемента, или $\zeta = 1$, в случае правого узла элемента, во второй интеграл (5), получим

векторную функцию сил упругости и вектор сил демпфирования подшипника

$$N_{e,i}^T P_{x,i}(u_x, u_y, u_z)_{\zeta=1} + N_{e,i}^T P_{y,i}(u_x, u_y, u_z)_{\zeta=1} =$$

$$= \begin{bmatrix} P_{x,i}(u_{i,1}, u_{i,3}, u_z) & 0 & P_{y,i}(u_{i,1}, u_{i,3}, u_z) & 0 \end{bmatrix}^T =$$

$$= K_{\Pi}(U)_i, \quad (16)$$

$$N_{e,i}^T C \dot{u}_{x,i} \Big|_{\zeta=1} + N_{e,i}^T C \dot{u}_{y,i} \Big|_{\zeta=1} =$$

$$= \begin{bmatrix} C \dot{u}_{x,i} & 0 & C \dot{u}_{y,i} & 0 \end{bmatrix}^T = C \dot{U}_i, \quad (17)$$

где C – матрица демпфирования. Координата u_z в (16) не зависит от узла, поскольку принята модель вала без продольных деформаций.

Если ротор установлен на вибрирующем основании, к правой части уравнения добавляется вектор кинематического возбуждения колебаний [5]

$$H_{\Pi}(\omega, t) = -M A_{\Pi}(\omega, t), \quad (18)$$

где M – матрица масс,

$A_{\Pi}(\omega, t)$ – вектор виброускорений опор,
 ω – круговая частота вибрации опор.

Объединяя матрицы, полученные по формулам (7), (8), (10), (11), (14), и векторы (13), (16), (17), (18) по правилам сборки МКЭ [7], получим уравнение колебаний:

$$M \ddot{U} + G \dot{U} + C U + K U + K_{\Pi}(U) = H_D(\Omega, t) + H_{\Pi}(\omega, t). \quad (19)$$

Частоту вращения ротора Ω считаем фиксированной, частота вибрации опор ω изменяется в заданном диапазоне.

3. Результаты численных исследований

Умножив (19) на M^{-1} , получим

$$\ddot{U} + G' \dot{U} + C' U + K' U + K'_{\Pi}(U) =$$

$$= M^{-1} H_D(\Omega, t) - A_{\Pi}(\omega, t), \quad (20)$$

где $M^{-1} G = G'$,

$$M^{-1} K = K', \quad M^{-1} C = C',$$

$$M^{-1} K_{\Pi}(U) = K'_{\Pi}(U).$$

Для дальнейших исследований введем безразмерные параметры:

$$\bar{x}_n = x_n / z_0, \quad \bar{y}_n = y_n / z_0, \quad \bar{z} = z / z_0, \quad \bar{\omega} = \omega / \omega_1,$$

$$\bar{\Omega} = \Omega / \omega_1, \quad \tau = t \cdot \omega_1,$$

где ω_1 – основная резонансная частота линеаризованной системы и запишем (20) в виде нелинейной векторной функции:

$$\ddot{U} = f(U, \dot{U}, \tau), \quad (21)$$

где f – N -мерная векторная функция.

Для построения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) выполняем анализ уравнения (21) методом продолжения по параметру [8], которым определяется также матрица монодромии, устойчивость и характер бифуркаций периодического решения уравнения.

Проанализированы колебания ротора длиной $L = 0,34$ м. Диаметр вала между опорами $d_2 = 0,032$ м. Длина и диаметр консольного конца вала соответственно $l = 0,06$ м и $d_1 = 0,025$ м. Масса и моменты инерции диска соответственно $m = 5,0$ кг, $I_x = 0,1$ кг·м², $I_z = 0,2$ кг·м². Параметры радиально-упорных подшипников такие: $\alpha = 15^\circ$; $R_2 = 27,525$ мм – радиус внешней канавки качения; $R_1 = 16,000$ мм – радиус внутренней канавки качения; $R_K = 5,930$ мм – радиус поперечного сечения канавок качения; $d_B = 11,510$ мм – диаметр шарика; $N_B = 7$; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па – модуль Юнга; $\mu = 0,3$ – коэффициент Пуассона. Демпфирование, обусловленное трением в подшипниках, обычно определяют на основе экспериментов и описывают моделью вязкого трения [9], в расчетах принят коэффициент демпфирования $C = 52,5$ Н·с/м.

Проанализированы вынужденные колебания ротора вращающегося с частотой $f_{\Omega} = \Omega / 2\pi = 50$ Гц. Колебания возбуждаются дисбалансом диска, эксцентриситет которого $a = 0,008$ мм, и вибрацией опор, амплитуды которой – $A_{\Pi x} = 0$, $A_{\Pi y} = 2g$, где $g = 9,8$ м/с². Частота вибрации опор f_{ω} меняется в диапазоне от 20 Гц до 2000 Гц. На рис. 2. изображена АЧХ колебаний ротора.

По оси ординат отложен полуразмах безразмерной координаты центра диска \bar{y}_O . Резонанс $\bar{\omega}_2$ соответствует форме колебаний, когда цапфы находятся с противоположных сторон от оси симметрии подшипников и при колебаниях вал совершает прямую прецессию. По этой же форме совершаются колебания вала на суперрезонансах порядка $2/1 - 5/1$, пики которых обозначены на рис. 2 $\bar{\omega}_2/2 - \bar{\omega}_2/5$. Резонансные колебания с низкой частотой $\bar{\omega}_1$ по форме, когда вал совершает обратную прецессию, не наблюдаются. Устойчивые режимы резонансных колебаний данного ротора исследованы в работе [10].

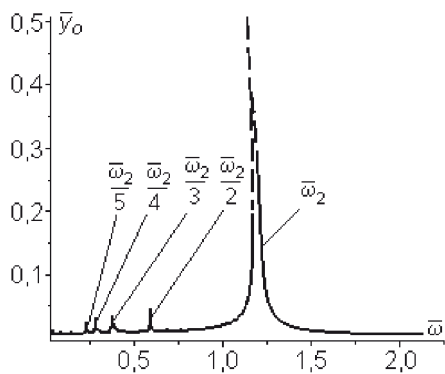


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика

На левых ветвях резонансных пиков осуществляются седло-узловые бифуркации, а на правой ветви резонансного пика $\bar{\omega}_2$ осуществляется бифуркация двумерного тора [11]. Размахи неустойчивых колебаний остаются ограниченными и относительно мало меняются со временем.

На рис. 3 показана траектория центра диска за десять периодов выше точки бифуркации на левой ветви резонансного пика $\bar{\omega}_2$. В этой точке частота $\bar{\omega} = 1,1196$, а наибольший мультипликатор матрицы монодромии $\lambda_1 = 1,1005$. На рис. 4 показана зависимость от времени \bar{y}_0 при этой частоте.

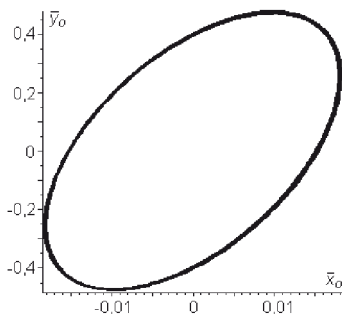


Рис. 3. Траектория центра диска, $\bar{\omega} = 1,1196$

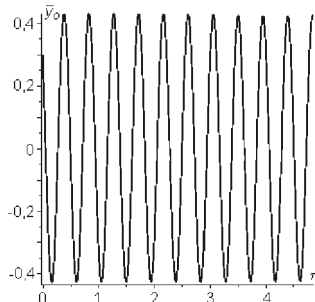


Рис. 4. Зависимость от времени \bar{y}_0 , $\bar{\omega} = 1,1196$

В безразмерных параметрах размах колебаний приблизительно равен 0,9 и отклонения

координаты \bar{y}_0 от установившейся траектории достигают 0,005.

На рис. 5 и рис. 6 показаны отображения Пуанкаре неустойчивых колебаний на левой и правой ветвях резонансного пика $\bar{\omega}_2$.

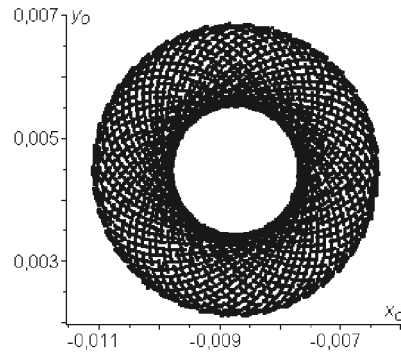


Рис. 5. Отображение Пуанкаре, $\bar{\omega} = 1,1196$

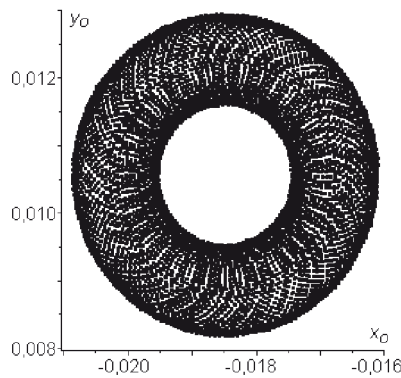


Рис. 6. Отображение Пуанкаре, $\bar{\omega} = 1,1371$

Эти рисунки показывают, что переходные процессы приводят к хаотическим колебаниям.

Заключение

Совместное действие дисбаланса и вибрации опор вызывает резонансы двух форм колебаний ротора, а также суперрезонансы порядка 2/1, 3/1, и т.д. Поэтому резонансные колебания могут иметь место во всем диапазоне частот ниже основной резонансной частоты. Слева от основного резонанса первой формы колебаний наблюдается седло-узловая бифуркация, а справа — бифуркация двумерного тора. На неустойчивых режимах происходит переход к хаотическим колебаниям с малым размахом.

Предлагаемый подход может быть применен как основа для усовершенствования численного анализа динамики роторов транспортных средств.

Литература

1. Хронин Д. В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов [Текст] /

Д. В. Хронин. – М.: Машиностроение, 1970. – 412 с.

2. Babu C. K. Nonlinear vibration analysis of an elastic rotor supported on angular contact ball bearings considering six degrees of freedom and waviness on balls and races [Текст] / С.К. Babu, N. Tandon, R. K. Pandey // Journal of Vibration and Acoustics. – 2014. – V. 136(4). – P. 044503-1-5.

3. El-Saeidy F. M. A. Dynamics of a Rigid Rotor Linear/Nonlinear Bearings System Subject to Rotating Unbalance and Base Excitations [Text] / F. M. A. El-Saeidy, F. Sticher. // J. of Vibration and Control. – 2010. – Vol. 16(3): P. 403-438.

4. Филипковский С. В. Свободные нелинейные колебания многодисковых роторов на шарикоподшипниках [Текст] / С. В. Филипковский, К. В. Аврамов // Проблемы прочности. – 2013. – № 3. – С. 86–96.

5. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле [Текст] / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

6. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний [Текст] / В. Л. Бидерман – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

7. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст] / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 320 с.

8. Seydel R. Nonlinear computation [Text] / R. Seydel // Int. J. of Bifurcation and Chaos. – 1997. – Vol. 7. – P. 2105–2126.

9. Kramer E. Dynamics of Rotors and Foundations [Text] / E. Kramer. New York: Springer-Verlag, 1993. – 384 p.

10. Филипковский С. В. Нелинейные колебания ротора с диском на консольном конце при вибрации опор [Текст] / С. В. Филипковский // Авиационно-космическая техника и технология. – 2016. – № 3(130). С. 45–50.

11. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах [Текст] / В. С. Анищенко. – М.: Наука, 1990. – 312 с.

Поступила в редакцию 31.05.2017 г.

С.В. Філіпковський, Л.О. Філіпковська. Стійкість і біфуркації коливань пружного ротора з диском на консольному кінці і шарикопідшипників в віброуючому планері літального апарату

Побудовано нелінійну скінченоелементну модель пружного ротора на шарикопідшипниках. Досліджено нелінійні коливання ротора, коли прогини валу і деформації підшипників одного порядку, коливання викликаються одночасною дією дисбалансу і вібрації опор, частота обертання ротора і частота вібрації опор одного порядку. Проаналізовано стійкість і біфуркації вимушених коливань ротора. Спільна дія дисбалансу і вібрації опор викликає резонанси і супер-резонанси по основній формі коливань ротора. На нестійких режимах у ротора з диском на консольному кінці відбувається перехід до хаотичних коливань з малим розмахом.

Ключові слова: вал, диск, дисбаланс, шарикопідшипник, вібрація опор, резонанс, біфуркація.

S.V. Filipkovsky, L.A. Filipkovskaja. Stability and bifurcations of vibrations of the elastic rotor with a disk on cantilevered end and ball bearings in the aircraft vibrating airframe

A nonlinear finite element model of a flexible rotor with a disk on the cantilevered end is constructed. The nonlinear oscillations of the rotor are investigated when the deflections of the shaft and the deformation of bearings are of the same order; the oscillations are caused by the mutual action of imbalance and vibration of the supports; the shaft rotational speed and the vibration frequency of the supports are the values of the same order. The stability and bifurcations of the forced oscillations of the rotor are analyzed. The mutual action of imbalance and vibration of the supports causes resonances and super-resonances in the principal mode of the rotor oscillations. The chaotic oscillations with the small peak-to-peak displacements are on unstable oscillations modes of the rotor with a disk on the cantilevered end.

Keywords: shaft, disk, imbalance, ball-bearing, vibration of supports, resonance, bifurcation.