

УДК 539.3

Д-р техн. наук А. С. Каиров, С. А. Моргун

Национальный университет кораблестроения им. адм. Макарова, г. Николаев

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ДИСКА С ВЕНЦОМ РАБОЧИХ ЛОПАТОК ТУРБОМАШИН КАК ЦИКЛИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

*Изложена методика исследований колебаний венцов рабочих лопаток турбомашин как циклически симметричной системы в поле центробежных сил методом конечных элементов, позволяющая учесть конструктивную неоднородность пера лопатки. Приведены результаты расчета низшего спектра частот колебаний рабочего колеса третьей ступени турбины и сравнение их с результатами, полученными экспериментальным путем.*

**Ключевые слова:** лопатки турбомашин, сектор диска, демпферные связи, колебания, метод конечных элементов, спектр частот.

### Введение

Одной из важных задач развития энергетики является увеличение объемов генерируемой энергии при максимальной экономичности процесса генерации. Достичь этого возможно при увеличении мощности турбоагрегатов, что, в свою очередь, ведет к ускоренному выходу из строя наиболее нагруженных деталей и снижению ресурса оборудования в целом. Поэтому возникает необходимость разработки уточненной математической модели колебательных процессов, происходящих в таком важном узле как лопаточный аппарат и повышения его вибрационной надежности.

Основные вопросы расчета частот и форм колебаний рабочих колес компрессоров и турбин с применением методов Ритца и Бубнова-Галеркина приведены в работах [1, 2]. Однако, эти методы имеют низкую вычислительную точность при рассмотрении охлаждаемых лопаток, а также лопаток с большим углом закрутки. Кроме того, в работе [2] делается упрощающее предположение о синусоидальной форме прогиба по окружности лопаточного венца. Метод конечных элементов, примененный в работе [3], позволяет избежать недостатков, присущих математическим моделям на основе стержневой теории, однако, вычисление искомых частот колебаний методом статической конденсации, используемым в [3], имеет ограниченное применение к задачам динамики и не обеспечивает удовлетворительного описания сложных форм колебаний. Исследование колебаний отдельных лопаток турбомашин методом динамических суперэлементов приведено в работе [4], а экспериментальным путем в работе [5]. Однако, в целом, вопрос исследования ко-

лебаний венцов этих лопаток недостаточно изучен. **Целью работы** является разработка уточненной математической модели колебаний венца рабочих лопаток турбомашин как циклически симметричной системы с использованием метода конечных элементов.

### Изложение основного материала

Циклически симметричную систему можно интерпретировать в виде совокупности  $\chi$  секций с одинаковыми геометрическими, инерционными и жесткостными свойствами. При этом  $\chi$  определяет порядок симметрии системы [3]. Венец, состоящий из  $z$  идентичных рабочих лопаток, также является циклически симметричной системой с порядком симметрии  $z$ . Секция такой системы включает в себя в общем случае сектор диска и укрепленную в нем лопатку с участками связей (рис. 1).



**Рис. 1.** Модель секции (сектор диска с лопаткой и участками связей) для расчетов колебаний рабочих лопаток турбомашин

Индексами  $a, b, c$  на рис. 1 обозначены левая, правая границы и средняя часть секции.

Воспользовавшись конечно – элементарным подходом и уравнением Лагранжа II рода, получим уравнения движения секции:

$$M_{JJ}\ddot{a}_J + K_{JJ}a_J = Q_J \quad (J=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где  $M_{JJ}$  и  $K_{JJ}$  – элементы матриц инерции и жесткости соответственно;  $a_J$  – вектор узловых перемещений;  $Q_J$  – вектор неизвестных нагрузок, приложенных в граничных узлах секции;  $n$  – число степеней свободы секции.

После соответствующей перестановки элементов матриц и векторов в (1) уравнение движения секции запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & M_{(J)J}^{aa}\ddot{a}_J^a + M_{JR}^{ac}\ddot{a}_R^c + M_{JP}^{ab}\ddot{a}_P^b + \\ & + K_{(J)J}^{aa}a_J^a + K_{JR}^{ac}a_R^c + K_{JP}^{ab}a_P^b = Q_J^a; \\ & M_{RJ}^{ca}\ddot{a}_J^a + M_{(R)R}^{cc}\ddot{a}_R^c + M_{RP}^{cb}\ddot{a}_P^b + \\ & + K_{RJ}^{ca}a_J^a + K_{(R)R}^{cc}a_R^c + K_{RP}^{cb}a_P^b = 0; \\ & M_{PJ}^{ba}\ddot{a}_J^a + M_{PR}^{bc}\ddot{a}_R^c + M_{(P)P}^{bb}\ddot{a}_P^b + \\ & + K_{PJ}^{ba}a_J^a + K_{PR}^{bc}a_R^c + K_{(P)P}^{bb}a_P^b = Q_P^b; \end{aligned} \quad (J=1, \dots, n_a; R=1, \dots, n_c; P=1, \dots, n_b). \quad (2)$$

где индексами  $a, c, b$  отмечены степени свободы и соответствующие им элементы матриц левой границы, средней части и правой границы секции соответственно;  $n_a = n_b$  – число степеней свободы границы (как левой, так и правой);  $n_c$  – число степеней свободы средней части секции.

В формулах (2) суммирование по индексам в скобках не производится. При решении задачи о свободных колебаниях нагрузка в средней части секции отсутствует.

Переходя к частотным уравнениям, получаем:

$$\begin{aligned} & \Lambda_{(J)J}^{aa}a_J^a + \Lambda_{JR}^{ac}a_R^c + \Lambda_{JP}^{ab}a_P^b = q_J^a; \\ & \Lambda_{RJ}^{ca}a_J^a + \Lambda_{(R)R}^{cc}a_R^c + \Lambda_{RP}^{cb}a_P^b = 0; \\ & \Lambda_{PJ}^{ba}a_J^a + \Lambda_{PR}^{bc}a_R^c + \Lambda_{(P)P}^{bb}a_P^b = q_P^b, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a_J^a, a_R^c, a_P^b$  – амплитуды колебаний узлов левой границы, средней части и правой границы секции соответственно;  $q_J^a, q_P^b$  – амплитуды неизвестных нагрузок в граничных узлах секции;  $\Lambda_{(J)J}^{aa}, \Lambda_{JR}^{ac}$  и т. д. – блоки динамической матрицы жесткости секции.

Из второго уравнения системы (3) можно получить:

$$a_R^c = -(\Lambda_{(R)R}^{cc})^{-1}[\Lambda_{RJ}^{ca}a_J^a + \Lambda_{RP}^{cb}a_P^b]. \quad (4)$$

Подстановка (4) в систему (3) дает:

$$\begin{aligned} & \bar{\Lambda}_{(J)J}^{aa}a_J^a + \bar{\Lambda}_{JP}^{ab}a_P^b = q_J^a; \quad \bar{\Lambda}_{PJ}^{ba}a_J^a + \bar{\Lambda}_{(P)P}^{bb}a_P^b = q_P^b; \\ & (J, P=1, \dots, n_a), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \text{где} \quad \bar{\Lambda}_{(J)J}^{aa} = \Lambda_{(J)J}^{aa} - \Lambda_{JR}^{ac}(\Lambda_{RU}^{cc})^{-1}\Lambda_{UJ}^{ca}; \\ & \bar{\Lambda}_{PJ}^{ba} = (\bar{\Lambda}_{JP}^{ab})^T = \Lambda_{PJ}^{ba} - \Lambda_{JR}^{ac}(\Lambda_{RU}^{cc})^{-1}\Lambda_{UP}^{cb}; \\ & \bar{\Lambda}_{(P)P}^{bb} = \Lambda_{(P)P}^{bb} - \Lambda_{PR}^{bc}(\Lambda_{RU}^{cc})^{-1}\Lambda_{UP}^{cb}; \\ & (J, P=1, \dots, n_a; R, U=1, \dots, n_c). \end{aligned}$$

Соотношения (5) преобразуем в следующем виде:

$$\bar{\Lambda}_{(J)J}^{aa}a_J^a + \bar{\Lambda}_{JP}^{ab}a_P^b = q_J^a; \quad \bar{\Lambda}_{PJ}^{ba}a_J^a = -\bar{\Lambda}_{(P)P}^{bb}a_P^b + q_P^b. \quad (6)$$

Из второго уравнения формулы (6) имеем:

$$a_J^a = -(\bar{\Lambda}_{PJ}^{ba})^{-1}\bar{\Lambda}_{(P)P}^{bb}a_P^b + (\bar{\Lambda}_{PJ}^{ba})^{-1}q_P^b; \quad (J, P=1, \dots, n_a).$$

Подставив полученное выражение в первое уравнение системы (6), запишем:

$$q_J^a = \left[ \bar{\Lambda}_{(J)J}^{aa} \left( -(\bar{\Lambda}_{PJ}^{ba})^{-1}\bar{\Lambda}_{(P)P}^{bb}a_P^b + (\bar{\Lambda}_{PJ}^{ba})^{-1}q_P^b \right) \right] + \bar{\Lambda}_{JP}^{ab}a_P^b. \quad (8)$$

Введем обозначения:

$$Y_a = \begin{Bmatrix} a_1^a \\ \vdots \\ a_{n_a}^a \\ q_1^a \\ \vdots \\ q_{n_a}^a \end{Bmatrix}; \quad Y_b = \begin{Bmatrix} a_1^b \\ \vdots \\ a_{n_b}^b \\ q_1^b \\ \vdots \\ q_{n_b}^b \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Тогда уравнение (8) можно записать в следующем виде:

$$Y_a = \Lambda Y_b, \quad (10)$$

где  $\Lambda$  – матрица связи характеристик левой и правой границ секции. Эта матрица имеет следующую структуру:

Пронумеруем секции рассматриваемой системы (венца лопаток) от 1 до  $z$ . Для  $k$ -ой секции уравнение (10) запишется так:  $Y_a^k = \Lambda Y_b^k$ . При

этом  $Y_b^k = Y_a^{k+1}$ . Следовательно,  $Y_a^1 = \Lambda^1 Y_a^2$ ,  $Y_a^2 = \Lambda^2 Y_a^3, \dots, Y_a^k = \Lambda^k Y_a^{k+1}, Y_a^{k+1} = \Lambda^{k+1} Y_a^{k+2}, \dots$ ; (11)  $Y_a^z = \Lambda^z Y_a^1$ , причем верхний индекс обозначает

номер секции. Отсюда:

$$\begin{aligned} [\Lambda^z - E] Y_a^k &= 0, \\ (k &= 1, \dots, z), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $E$  – единичная матрица.

Условие нетривиальности системы уравнений (12) дает частотное уравнение собственных колебаний циклически симметричной системы [3]:

$$|\Lambda^z - E| = 0. \quad (13)$$

Соотношение (12) можно также записать следующим образом:

$$\prod_{k=1}^z \left( \Lambda - E e^{\frac{2\pi k i}{z}} \right) Y_a = 0, \quad (14)$$

где  $i$  – мнимая единица.

В этом случае частотное уравнение примет вид:

$$\prod_{k=1}^z \left| \Lambda - E e^{\frac{2\pi k i}{z}} \right| = 0. \quad (15)$$

В произведении (15) можно выделить комплексно – сопряженные сомножители, которые будут определять частотные уравнения колебаний циклически симметричной системы. При этом,  $k$  будет означать число деформационных волн по окружности венца лопаток.

### Основные результаты и их анализ

С целью практической проверки разработанной математической модели и выработки рекомендаций по ее применению к расчету различных систем рабочих лопаток было проведено исследование свободных колебаний рабочего колеса третьей ступени турбины. На диске расположено 80 закрученных лопаток переменного поперечного сечения с замкнутыми на круг связями. Высота лопатки  $l = 135$  мм; материал лопаток – жаропрочная сталь СМ88У-ВИ (плотность материала  $\rho = 8100$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $1,79 \times 10^6$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ). Диаметр диска  $D = 450$  мм. Лопатки имеют хвостовики елочного типа с торцевой заводкой в диск. При расчетах частота вращения ротора изменялась в пределах  $n = 110-160$  с<sup>-1</sup>.

Конечно-элементная модель пера лопатки строилась на основе суперпараметрического криволинейного элемента, состояла из 20 конечных элементов и имела 385 степеней свободы. Демпферные связи лопаток в колесе моделировались при помощи стержневого конечного элемента. Модель хвостовика лопатки состояла из 189 изопараметрических призматических элементов первого порядка с 960 степенями свободы. Модель

сектора диска включала в себя 230 призматических конечных элементов первого порядка, имеющих 1254 степеней свободы.

На рис. 2 в графическом виде представлены результаты расчетного и экспериментального исследований (экспериментальные данные приведены в работе [6]) спектра частот свободных колебаний венца рабочих лопаток при вращении ротора с частотой от 110 до 160 с<sup>-1</sup>. Расчеты проводились с учетом податливости соединения диска с хвостовиком в поле центробежных сил. Из приведенных результатов, очевидно, что значения расчетных частот колебаний (кривая 1) лежат выше соответствующих экспериментальных частот (кривая 2) на всем диапазоне частот вращения ротора. С увеличением частоты вращения указанное расхождение возрастает, изменяясь от 0,2 % для нижней границы рассматриваемого диапазона, и составляет 5,8 % для верхней границы. Это может быть объяснено появлением каких-либо особенностей в экспериментально исследуемой конструкции при ее изготовлении и эксплуатации, не учтенных в математической модели, которая формируется по номинальным параметрам рабочего колеса. Кроме того, несовпадение частот колебаний венца рабочих лопаток, рассчитанных при помощи метода конечных элементов, с экспериментальными данными объясняется тем, что при проведении эксперимента невозможно абсолютно точно достичь заданных граничными условиями значений податливости хвостовика лопатки и диска.

Это, в свою очередь, приводит к возникновению погрешности и расхождению экспериментальных и расчетных данных. Снижение частот колебаний рабочего колеса при его вращении также может быть вызвано разгрузкой некоторых зубьев хвостовика, что приводит к снижению жесткости системы, а, значит и уменьшению частот колебаний. Следовательно, можно сделать вывод, что частоты, рассчитанные методом конечных элементов (МКЭ), обладают большей достоверностью. Главными недостатками этого метода являются увеличение времени счета и необходимость наличия ЭВМ с большим объемом оперативной памяти.

### Заключение

С использованием метода конечных элементов (МКЭ) решена задача расчета низшего спектра частот колебаний рабочих колес лопаток турбомашин как циклически симметричной системы в поле центробежных сил. Для решения задачи разработана уточненная математическая модель секции «рабочая лопатка с демпферными связями – сектор диска», позволяющая учитывать в достаточной мере структуру реальной конструкции: пера и хвостовика лопатки,

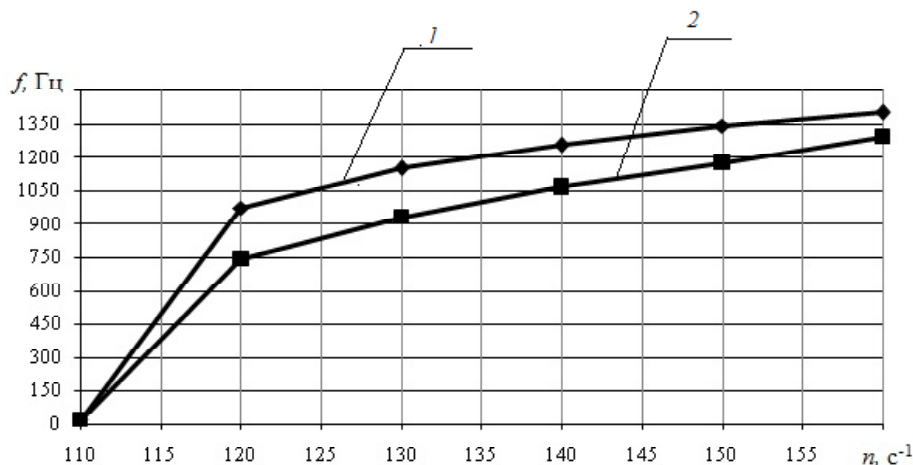


Рис. 2. Результаты расчетного и экспериментального исследования колебаний венца рабочих лопаток в диапазоне рабочих скоростей вращения ротора:

1 – расчет с учетом податливости хвостовиков лопаток и диска; 2 – данные эксперимента [6]

### Список литературы

1. Воробьев Ю. С. Колебания лопаточного аппарата турбомашин / Ю. С. Воробьев. – К. : Наук. думка, 1988. – 224 с.
2. Костюк А. Г. Динамика и прочность турбомашин / А.Г. Костюк. – М. : Машиностроение, 1982. – 264 с.
3. Иноземцев А. А. Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок / А. А. Иноземцев, М. А. Нихамкин, В. Л. Сандрацкий. – М. : Машиностроение, 2007. – 232 с.
4. Каиров А. С. Исследование собственных колебаний лопаток газотурбинного двигателя методом динамических суперэлементов / А. С. Каиров, С. А. Моргун // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 20. – С. 176–182.
5. Моргун С. А. Экспериментальное исследование свободных колебаний лопаток газотурбинного двигателя / С. А. Моргун, А. С. Каиров // Методи розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ : Ліра. – 2011. – Вип. 12. – С. 224–229.
6. Petyt M. Experimental analysis of practically bladed disks / M. Petyt // Proceeding 3<sup>rd</sup> Aircraft Conference, 11–14 November 2008. – Capacabana Beach, Florida, the USA, 2008. – P. 21–26.

Поступила в редакцию 28.01.2012

### Каиров А.С., Моргун С.А. Дослідження коливань диска з вінцем робочих лопаток турбомашин як циклічно симетричної системи у полі відцентрових сил

Наведено методику досліджень коливань вінців робочих лопаток турбомашин в якості циклічно симетричної системи в полі відцентрових сил методом кінцевих елементів, яка дає можливість врахувати конструктивну неоднорідність пера лопатки. Наведено результати розрахунку нижчого спектру частот коливань робочого колеса третього ступеня турбіни та їх порівняння з результатами, отриманими експериментальним шляхом

**Ключові слова:** лопатки турбомашин, сектор диска, демпферні зв'язки, метод кінцевих елементів, спектр частот.

### Kairov A., Morgun S. Investigation of turbine disc rims frequency as cyclic symmetric system in centrifugal force field

The paper describes a research technique of frequency of turbine rims as cyclic symmetric system in centrifugal force field by means of finite elements method that allows to consider structural discontinuity of blade airfoil. Finite element data of turbine st.3 rotor wheel lowest frequency spectrum and their comparison with experimental results are presented.

**Key words:** turbine blades, disk segment, damper links, frequencies, finite elements method, frequency spectrum.