

УДК 539.3

Канд. техн. наук Д. В. Данильченко¹, канд. техн. наук А. В. Засовенко²,
канд. техн. наук Ю. В. Мастиновский²

¹ ТОО «ДАТА Х», ² Запорожский национальный технический университет;
г. Запорожье

ТОРЦЕВОЙ УДАР ПО ОБОЛОЧКЕ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОСЬЮ

В работе рассматривается действие осесимметричной краевой нагрузки на криволинейную оболочку постоянного кругового сечения, имеющую вид части тора. Задача решается численно с использованием метода характеристик.

Ключевые слова: тороидальная оболочка, торцевой удар, метод характеристик.

Качественные закономерности распространения упругих волн в тонкостенных оболочках, находящихся под действием кратковременных нагрузок, представляют интерес при оценке их прочности, жесткости и устойчивости.

Оболочки простейших канонических форм исследованы сравнительно подробно. Весьма сложными для расчета оказываются оболочки с иной геометрической структурой – трубчатые оболочки, получаемые движением образующей – плоской замкнутой кривой вдоль некоторой направляющей линии. Такие оболочки находят широкое применение, например, в качестве трубопроводов, переходных патрубков и т. п. Трубопроводы со сложным очертанием осевой линии являются самым распространенным конструктивным элементом в энергетических установках. Они применяются в агрегатах высокого давления, в циркуляционных насосах и других системах, подвергающихся различным нагрузкам – высоким

давлением в сочетании со значительными вибрациями и нестационарными воздействиями.

Существующие методы анализа НДС трубопроводов традиционно строятся на базе стержневых моделей. Такой подход может быть оправдан при расчете толстостенных труб. Насколько известно авторам, решение задач для тонких торообразных оболочек в нестационарной постановке до сих пор не проводилось. Можно ожидать, что для проектировщиков и конструкторов представляют интерес конкретные результаты по расчетам оболочек, поверхность которых образована вращением вокруг оси окружности, эллипса и замкнутых многоугольников.

Основные соотношения и уравнения моментной теории оболочек вращения приводятся в работах [1, 2]. Торовую оболочку, как оболочку вращения, получаем в результате вращения вокруг оси z_0 окружности радиуса R_1 с радиусом центральной оси a_0 ($a_0 > R_1$, рис. 1).

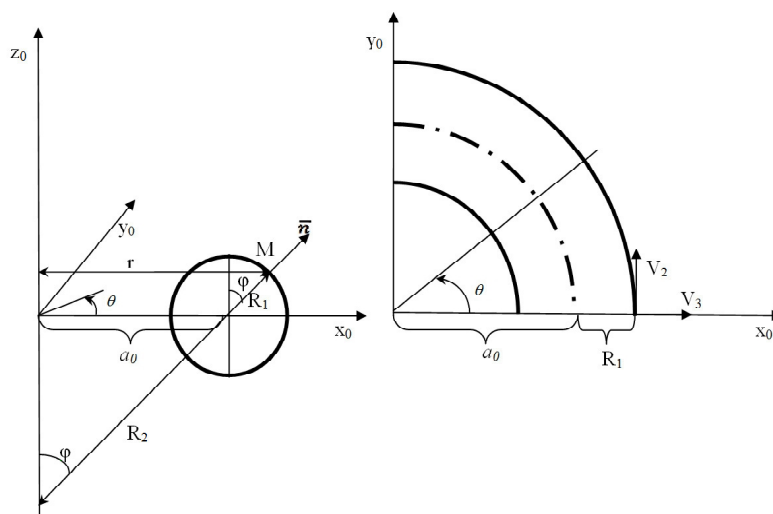


Рис. 1. Сечение оболочки с криволинейной осью

Координатная поверхность определяется углом θ (угол изгиба), задающим положение меридиальной плоскости, углом φ , измеряемым по меридиану от оси вращения. Третья координата z отсчитывается по нормам к координатной поверхности (в сторону внешней нормам, $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$, h – толщина оболочки).

Параметрическое уравнение поверхности тора запишется так:

$$\begin{cases} x_0 = r \cos \theta; \\ y_0 = r \sin \theta; \\ z_0 = R_1 \cos \varphi. \end{cases}$$

Здесь r – расстояние от рассматриваемой точки M до оси вращения z_0 ,

$$\begin{aligned} r &= a_0 + R_1 \sin \varphi; \\ a_0 - R_1 &\leq x_0 \leq a_0 + R_1; & 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ -R_1 &\leq z_0 \leq R_1; & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Тороидальная поверхность является поверхностью смешанного типа, т. к. для $0 < \varphi < \pi$ гауссова кривизна $\Gamma > 0$, а при $\pi < \varphi < 2\pi$, $\Gamma < 0$ (центры главных кривизн лежат по разные стороны от поверхности). Зависимость между дифференциалами дуг координатных линий и дифференциалами криволинейных координат определяется соотношениями:

$$dS_1 = A_1 d\varphi = R_1 d\varphi; \quad dS_2 = A_2 d\theta = r d\theta,$$

где коэффициенты Ляме:

$$A_1 = R_1; \quad A_2 = r = a_0 + R_1 \sin \varphi.$$

R_1 и $R_2 = \frac{r}{\sin \varphi}$ – радиусы главных кривизн. За-

метим, что при $\pi < \varphi < 2\pi$, т. е. для части тора с вогнутым вовнутрь меридианом (относительно оси вращения) радиус кривизны R_2 следует брать со знаком минус.

В данной работе рассматривается продольное (осевое) распространение импульса осесимметричной краевой нагрузки. При этом для оболочки вращения должно быть определено осесимметричное распределение напряжений, в котором составляющая перемещения в перпендикулярном к меридиональной плоскости (окружности) направлении не обладает осевой симметрией. Будем считать, что определяющей является осесимметричная относительно оси оболочки составляющая движения. Поэтому, исходная система уравнений не зависит от перемещений и деформаций координатной поверхности в направлении меридиана.

Тогда уравнения движения тороидальной оболочки в безразмерном виде запишутся так:

$$\begin{cases} U_{,ss} - U_{,\tau\tau} = F_1; \\ \Psi_{,ss} - \Psi_{,\tau\tau} = F_2; \\ W_{,ss} - \frac{1}{c_2^2} W_{,\tau\tau} = F_3, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} F_1 &= -c_2^2 \gamma (\Psi - \gamma U) - [v + \gamma(1 + c_2^2)] W_{,s}; \\ F_2 &= A(\Psi - \gamma U + W_{,s}); \\ F_3 &= \frac{1}{c_2^2} (1 + 2v\gamma + \gamma^2) W + [\gamma + \frac{1}{c_2^2} (v + \gamma)] U_{,s} - \Psi_{,s}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь нижние индексы после запятой означают частное дифференцирование.

Связь безразмерных и размерных параметров и величин определяется равенствами:

$$\tau = \frac{tc_p}{R_1}, \quad (t \text{ — время, } c_p^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}); \quad c_s^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)};$$

$$c_2^2 = k^2 \frac{c_s^2}{c_p^2} = \frac{k^2(1-\nu)}{2}; \quad A = 12c_2^2 \alpha^2, \quad (\alpha = \frac{R_1}{h}); \quad k \text{ —}$$

коэффициент сдвига, ν коэффициент Пуассона;

$$\gamma = \frac{R_1}{R_2}; \quad S = \frac{S_1}{R_1}; \quad (dS_1 = r d\theta, \quad S_1 \text{ — осевая координата});$$

$$U = \frac{V_2}{R_1}; \quad W = \frac{V_3}{R_1}, \quad (V_2, V_3 \text{ — смещения соответственно вдоль осевой координаты и по нормали к оболочке}; \quad \Psi \text{ — угол поворота нормали (рис. 1)).$$

Уравнения движения оболочки с прямолинейной осью можно получить предельным переходом. Полагая $\gamma = 0$, ($R_2 = \infty$) правые части (2) системы (1) примут вид:

$$F_1 = -v W_{,s}; \quad F_2 = A(\Psi + W_{,s}); \quad F_3 = \frac{1}{c_2^2} (W + v U_{,s}) - \Psi_{,s}. \quad (3)$$

Система (1) с правыми частями (3) совпадает с уравнениями для круговой цилиндрической оболочки, приведенными в [3] и полученными другим методом.

Для тороидальной оболочки при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ правые части (2) F_i ($i = 1; 2; 3$) системы (1) совпадают с выражениями (3) для цилиндрической оболочки. Наиболее существенные различия движений цилиндрической и торовой оболочки возникают при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($R_2 = a_0 + R_1$) и при

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi \quad (R_2 = a_0 - R_1).$$

Для анализа особенностей распространения упругих волн в обоих типах оболочек, вызванных ударным воздействием, начальные и граничные условия зададим в виде:

$$U = U_{,\tau} = W = W_{,\tau} = \Psi = \Psi_{,\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0;$$

$$\begin{cases} \psi = 0; \\ U_{,\tau} = V_0; \\ W_{,s} = 0, \end{cases} \text{ при } s = 0, \tau > 0. \quad (4)$$

$\tau > 0, s = \pi, N_s = Q_s = M_s = 0$ (осевые силы и момент равны нулю).

Из последних условий следует: $vW = -U_{,s}; \psi = W_{,s}; (W_{,s} = 0)$.

Поставленную задачу решим численно с использованием метода характеристик [4, 5]. Система уравнений (1) с правыми частями (2) и (3) имеет четыре семейства характеристик, которые предоставляют собой прямые линии в плоскости $sO\tau$ (рис. 2).

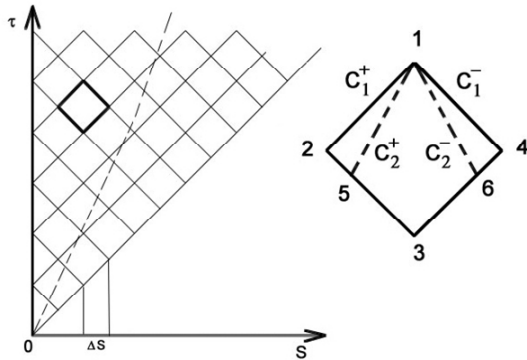


Рис. 2. Сетка характеристик, используемая при расчетах

$$x \pm c_1 \tau = const; \quad (c_1 = 1)$$

$$x \pm c_2 \tau = const;$$

Условия вдоль этих характеристик соответственно имеют вид:

$$dU_{,\tau} \pm dU_{,s} = \pm F_1 ds;$$

$$d\psi_{,\tau} \pm d\psi_{,s} = \pm F_2 ds;$$

$$dW_{,\tau} \pm dW_{,s} = \pm F_3 ds.$$

Кроме условий (4) используем условия непрерывности, которые выполняются вдоль любого направления:

$$df_i = f_{i,\tau} d\tau + f_{i,s} ds, \quad \text{где } i = 1; 2; 3; \quad f_1 = U; \\ f_2 = \psi; \quad f_3 = W.$$

Область возмущенного движения равномерно разбивается характеристическими линиями семейства $ds = d\tau$ на расчетную сетку (рис. 2).

Численно интегрируя вдоль отрезков характеристик соответствующие условия и используя линейную интерполяцию можно найти значения девяти неизвестных значений U, ψ, W и их первых производных в узловых точках на характеристиках, расположенных ниже по времени τ .

При расчете значений неизвестных в узловых точках, принадлежащих границе $s = 0$, используются условия на границе (4) и соотношение на характеристиках не выходящих за границы области интегрирования. Из условий (4) при $s = 0$, в случае задания нагрузки в виде $U_{,\tau} = V_0$, следует, что функции ψ и W сеточной области, а производные $U_{,\tau}$ и $U_{,s}$ теряет разрыв на характеристике $s = \tau$, которая является границей между областью возмущенного движения и областью покоя (остальные неизвестные в точках этой характеристики равны нулю в силу непрерывности). При вычислении значений $U_{,\tau}$ и $U_{,s}$ в узловых точках на характеристике $s = \tau$ используется условие $dU_{,\tau} - dU_{,s} = F_1 ds$. И условия на разрыве $[U_{,\tau}] + [U_{,s}] = 0$. Здесь $[U_{,\tau}]$ и $[U_{,s}]$ обозначают величины скачков производных на характеристике $s = \tau$. Следует отметить, что так как $W_x = 0$ при $s = \tau$ и $U_{,\tau} = U_{,s} = 0$ при $s > \tau$, то из условий (7) и (8) вытекает постоянство производных $U_{,\tau}$ и $U_{,s}$ вдоль характеристики $s = \tau$.

По описанной методике расчета, для сравнения, решена задача о торцевом ударе по цилиндрической и тороидальной оболочкам при условиях (4) для случая $V_0 = \tau \cdot e^{-\tau}$. Исходные безразмерные параметры задавались такими:

$$\Delta s = \Delta \tau = 0,001; \quad \alpha = \frac{R_1}{h} = 50; \quad \nu = 0,3; \quad c = 0,542;$$

$$A = 8760; \quad \gamma = 0, \frac{1}{3}; \frac{1}{9}.$$

На рис. 3 приведены распределения скоростей в момент времени $\tau = \pi$ при $\gamma = 0$, что соответствует цилиндрической оболочке. На рис. 4 для того же момента времени приведены распределения скоростей для $\gamma = \frac{1}{3}$ (рис. 4, а) и $\gamma = \frac{1}{9}$ (рис. 4, б).

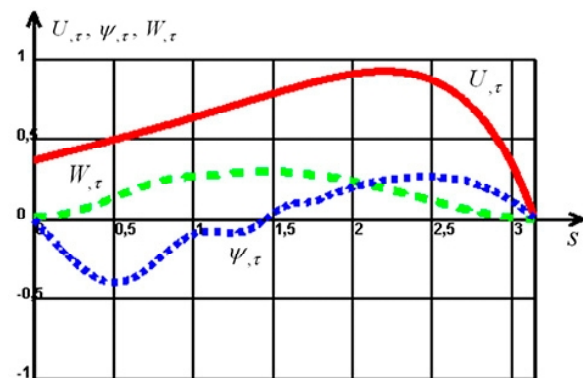


Рис. 3. Распределения скоростей в момент времени $\tau = \pi$ при $\gamma = 0$

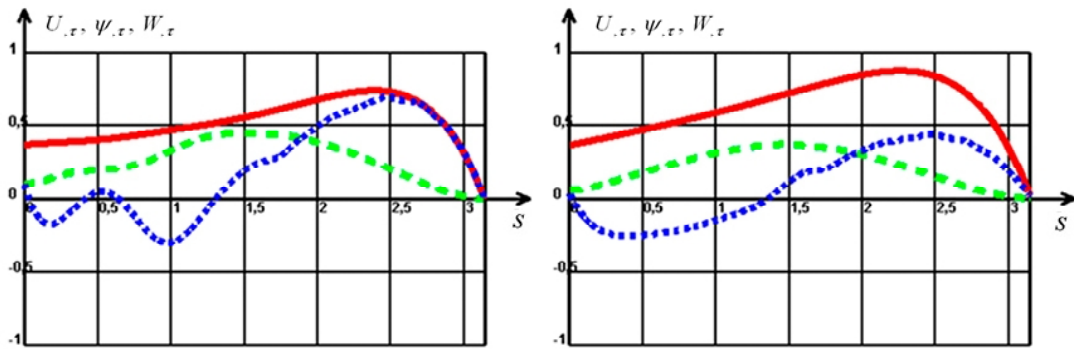


Рис. 4. Распределения скоростей в момент времени $\tau = \pi$ при $\gamma = 1/3$ и $\gamma = 1/9$

Получено решение задачи о распространении нестационарных волн в криволинейной оболочке в волновой постановке. Достоверность результатов обеспечивается корректностью постановки задачи – уравнения получены на основе известных соотношений общей теории оболочек вращения, выполнением условия Куранта-Фридрихса-Леви, обеспечивающего сходимость метода характеристик. Полученные результаты не противоречат ожидаемой физической картине распространения волн в оболочках с криволинейной осью.

Проведено исследование влияния геометрических параметров на неустановившееся движение оболочек. Предложенная методика может применяться для решения прикладных задач теории упругости.

Список литературы

1. Пацюк В. И. Волновые процессы в цилиндрической оболочке при не осесимметричном

продольном ударе / В. И. Пацюк, Г. А. Рыбакова, П. Ф. Сабодаш // Прикл. Механика. – 1985. – 21, № 1. – С. 35–42.

2. Перцев А. К. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи) / А. К. Перцев, Э. Г. Платонов – Л. : Судостроение, 1987. – 316 с.
3. Сагомоян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах / Сагомоян А. Я. – М. : Изд-во Моск. ун-та. 1985. – 416 с.
4. Данильченко Д. В. Нестационарные волны в составной цилиндрической оболочке / Д. В. Данильченко, Ю. В. Мастиновский // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2004, № 1, С. 119–122.
5. Мастиновский Ю. В. Нестационарная поперечная деформация оболочки с криволинейной осью / Ю. В. Мастиновский, Д. В. Данильченко // Вісник двигунобудування. – 2008. – № 2. – С. 50–53.

Поступила в редакцию 24.09.2012

Данильченко Д.В., Засовенко А.В., Мастиновський Ю.В. Торцевий удар по оболонці з криволінійною віссю

В роботі розглядається дія вісесіметричного крайового навантаження на криволінійну оболонку постійного кругового перерізу, що має вид частини тора. Задачу розв'язано чисельно з використанням методу характеристик.

Ключові слова: тороїдальна оболонка, торцевий удар, метод характеристик.

Danylchenko D., Zasoventko A., Mastinovskiy Y. Face impact on curved axis shell

The paper analyzes the effect of axisymmetric load on uniform circular cross-section toric shells. The task is solved numerically with the use of method of characteristics.

Key words: toric shells, edge impact, method of characteristics.