

УДК 539.3

**С.В. Филипповский**

*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины*

## НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ РОТОРА НА ПОДШИПНИКАХ КАЧЕНИЯ

*Получена модель колебаний симметричного ротора на подшипниках качения. Силы упругости подшипника описаны теорией контакта Герца. Нелинейная зависимость силы от перемещений разложена в степенной ряд. Учтены гироскопические моменты диска, и распределенная масса вала. Математическая модель колебаний ротора сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для анализа полученной системы применяется метод нелинейных нормальных форм Шоу-Пьерра. Получены формы колебаний ротора и фазовые траектории системы, построены скелетные кривые нелинейных колебаний ротора.*

**Ротор, подшипник качения, контактное взаимодействие, метод нелинейных нормальных форм, фазовые траектории, скелетные кривые**

### Введение

Многие приборы и агрегаты летательных аппаратов содержат вращающиеся роторы на подшипниках качения. Эти подшипники являются нелинейными опорами. Требование снижения веса и вибрации этих устройств приводит к необходимости повышения точности расчета амплитудно-частотных характеристик в различных режимах эксплуатации.

Поперечные колебания валов с дисками в линейной постановке с учетом гироскопических моментов, внешнего и внутреннего трения исследовано Ф.М. Диментбергом [1]. Собственные частоты механической системы, представляющей собой жесткий ротор с определенным кинетическим моментом, помещенный на упругих радиально-упорных шарикоподшипниках в жестком корпусе исследованы в линеаризованной постановке Л.З. Новиковым [2]. Е.Г. Голоскоков исследовал квазипериодическое движение ротора [3]. Нелинейные нормальные формы колебаний вращающегося вала в подшипниках скольжения исследованы в статье [4]. К.В. Аврамовым и К. Пьерром применен метод нелинейных нормальных форм к исследованию колебаний систем с гироскопическими силами [5].

Целью настоящей работы является исследование нелинейных колебаний жесткого ротора с диском на радиально-упорных шарикоподшипниках.

### 1. Уравнения движения системы

Расчетная модель рассматриваемой системы показана на рис. 1. Начало координат располагаем в сечении опоры А. Длина вала —  $l$ , диск закреплен посередине между опорами. Перемещения сечений вала по направлениям координатных осей обозначим  $u_x, u_y$ . Углы поворота сечения вала обозначим  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Угловые скорости сечений вала  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  связаны с углами поворота известными кинематическими соотношениями [6]. Определим перемещения вала [4]:

$$\begin{aligned} u_x(z, t) &= x_1(t) \frac{z}{l} + x_2(t) \frac{l-z}{l} \\ u_y(z, t) &= y_1(t) \frac{z}{l} + y_2(t) \frac{l-z}{l}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_v(t), y_v(t)$  — перемещения опорных сечений,  $v$  — номера опор.

Представим зависимости углов поворота от перемещения опорных сечений следующим образом:

$$\theta_1 = -(y_2 - y_1)/l, \quad \theta_2 = (x_2 - x_1)/l. \quad (2)$$

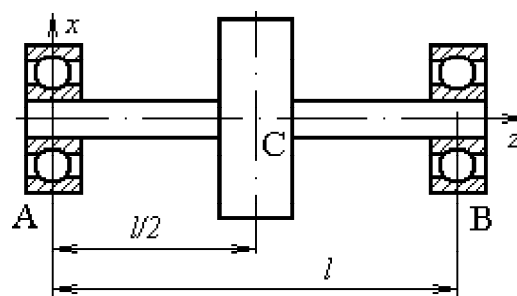


Рис. 1. Расчетная схема ротора

Кинетическая энергия вала  $T_B$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{\rho I}{2} \left( \int_0^l \dot{\theta}_1^2 dz + \int_0^l \dot{\theta}_2^2 dz \right) + \rho I \omega^2 l - \\ &- 2\rho I \omega \int_0^l \dot{\theta}_2 \theta_1 dz + \frac{\rho S}{2} \int_0^l (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2) dz, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\rho$  – плотность материала вала,  
 $I$  – момент инерции сечения вала,  
 $S$  – площадь сечения вала  
 $\omega = \omega_z$  – угловая скорость ротора.

Кинетическая энергия диска  $T_D$  запишется так:

$$T_D = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2) + \frac{I_0}{2}\omega^2 - I_0\omega\dot{\theta}_2\theta_1 + \frac{m_0}{2}\left[\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2}\right)^2\right], \quad (4)$$

где  $I_1$  – экваториальный момент инерции диска,  
 $I_0$  – полярный момент инерции диска,  
 $m_0$  – масса диска.

Считаем ротор жестким телом, поэтому потенциальная энергия системы  $\Pi$  складывается только из потенциальных энергий деформации подшипников  $\Pi_{\Pi}$ . Компоненты силы упругости подшипника определены следующими формулами [2]:

$$P_x = K \sum_{v=1}^N [x \cos \alpha \cos \beta_v + y \cos \alpha \sin \beta_v + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \cos \beta_v,$$

$$P_y = K \sum_{v=1}^N [x \cos \alpha \cos \beta_v + y \cos \alpha \sin \beta_v + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \sin \beta_v,$$

$$P_z = K \sum_{v=1}^N [x \cos \alpha \cos \beta_v + y \cos \alpha \sin \beta_v + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \sin \alpha, \quad (5)$$

где  $P$  – сила упругости подшипника,  
 $x, y, z$  – смещения центра внутреннего кольца относительно центра наружного кольца,  
 $\alpha$  – угол между линиями, проходящими через середины площадок контакта шариков с кольцами и плоскостью перпендикулярной оси ротора (рис. 2 а),

$\beta_v$  – угол между направлением на шарик  $n$  и осью  $x$  (рис. 2б),

$N$  – количество шариков,

$K$  – величина, определяемая формулой

$$K = \frac{3Q}{2N} z_0^{-3/2} \sin^{-5/2} \alpha, \quad (6)$$

где  $Q$  – сила предварительного осевого натяга,  
 $z_0$  – осевое смещение внутреннего кольца относительно внешнего кольца от действия силы  $Q$ .

Величину  $z_0$  можно определить рассмотрев геометрические соотношения в зонах контакта

$$z_0 = (2R_k + w_1 + w_2 - d_{ш}) \sin \alpha, \quad (7)$$

где  $R_k$  – радиусы канавок качения в кольцах подшипника,

$w_1$  и  $w_2$  – сближения внутреннего и внешнего колец с шариком по направлению линии контакта, вызванное предварительным осевым поджатием,

$d_{ш}$  – диаметр шарика.

Сближения вычисляются по формуле Герца [6]:

$$w_1 = b_1 P_k^{3/2}, \quad w_2 = b_2 P_k^{3/2} \quad (8)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  – коэффициенты формулы Герца,  
 $P_k$  – сила сжатия, действующая по направлению линии контакта

$$P_k = Q / (N \sin \alpha) \quad (9)$$

Угол  $\alpha$  находим путем решения уравнения

$$(2R_k - d_{ш} + w_1 + w_2) \cos \alpha = R_1 + 2R_k - R_2, \quad (10)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы внутреннего и внешнего колец, измеренные от оси подшипника до середины канавок качения.

Коэффициенты формулы Герца определены выражением

$$b = \frac{3}{2} F_1 \sqrt[3]{(K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}) k^2 (\Theta_1 + \Theta_2)^2 / (3E_1)} \quad (11)$$

$$\text{где } F_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

– эллиптические интегралы, в которых  $k_1^2 = 1 - k^2$ ,

$K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$  – кривизны главных нормальных сечений контактирующих поверхностей,  
 $k$  – корень трансцендентного уравнения

$$(F_1 - E_1) \left/ \left( F_1 - \frac{1}{k^2} E_1 \right) \right. = (K_{11} - K_{21}) / (K_{12} - K_{22}), \quad (12)$$

$\Theta_1$  и  $\Theta_2$  – величины, зависящие от свойств материалов контактирующих тел.

$$\Theta = (1 - \sigma^2) / (\pi E), \quad (13)$$

где  $\sigma$  – коэффициент Пуассона,  
 $E$  – модуль упругости.

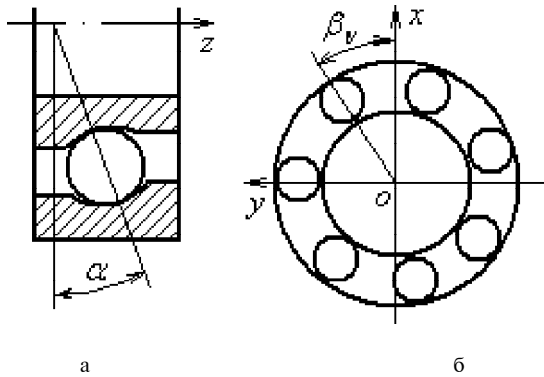


Рис. 2. Расчетная схема шарикоподшипника

Выражения (5) можно представить в виде степенных рядов, если предположить, что смещение в направлении оси вала, вызываемое предварительным осевым натягом подшипников, значительно превышает смещения, возникающие в процессе вибрации [2]. Тогда, полагая  $x/z_0$ ,  $y/z_0$ ,  $z/z_0$  малыми и, учитывая величины вплоть до третьего порядка малости, получим:

$$P_x = c_r x + \frac{c_r x z}{2z_0} - \frac{c_r x^3}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r x y^2}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r x z^2}{8z_0^2},$$

$$P_y = c_r y + \frac{c_r y z}{2z_0} - \frac{c_r y^3}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r y x^2}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r y z^2}{8z_0^2},$$

$$P_z = \frac{c_a 2z_0}{3} + c_a z + \frac{c_r x^2}{4z_0} + \frac{c_r y^2}{4z_0} + \frac{c_a z^2}{4z_0} - \frac{c_r x z^2}{8z_0^2} - \frac{c_r z y^2}{8z_0^2} - \frac{c_a z^3}{24z_0^2}, \quad (14)$$

где  $c_r = \frac{3}{4} N K z_0^{1/2} \sin^{1/2} \alpha \cos^2 \alpha$ ,  $c_a = 2c_r \operatorname{tg}^2 \alpha$ .

В силу симметрии расположения опор относительно центра инерции ротора будем полагать, что колебания по оси  $z$  отсутствуют. Тогда в первом и втором выражениях (14) исчезнут слагаемые, содержащие перемещение  $z$ , а третье выражение вообще не используется.

Соотношения (14) являются производными потенциальной энергии по перемещениям опорных сечений ротора. Таким образом, кинетическая и потенциальная энергии выражены функциями обобщенных перемещений и скоростей:

$$\begin{aligned} T &= T_B + T_D = T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \\ \Pi &= \Pi_{II} = \Pi(x_1, x_2, y_1, y_2) \end{aligned} \quad (15)$$

Диссипацией энергии в шарикоподшипнике пренебрегаем. Составим уравнение движения в виде уравнений Лагранжа второго рода. В результате получим:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [G]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} + [\tilde{K}]\{U^3\} + [\bar{K}]\{U_\mu^2 U_\nu\} = 0, \quad (16)$$

где  $[K]$ ,  $[\tilde{K}]$  и  $[\bar{K}]$  – матрицы жесткости,

$[G]$  – гироскопическая матрица,

$[M]$  – матрица масс,

$\{U\} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2]^T$  – вектор перемещений.

Компоненты матриц имеют следующий вид:

$$K_{1,1} = K_{2,2} = K_{3,3} = K_{4,4} = c_r,$$

$$\bar{K}_{1,1} = \bar{K}_{2,2} = \bar{K}_{3,3} = \bar{K}_{4,4} = -c_r / (32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

$$\tilde{K}_{1,1} = \tilde{K}_{2,2} = \tilde{K}_{3,3} = \tilde{K}_{4,4} = -c_r / (32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

$$G_{1,2} = G_{2,3} = G_{4,1} = G_{3,4} = \frac{2\rho I \omega}{1} + \frac{I_0 \omega}{1^2},$$

$$G_{2,1} = G_{3,1} = G_{4,3} = G_{1,4} = -G_{1,2},$$

$$M_{1,1} = M_{2,2} = \frac{\rho S l}{3} + \frac{\rho I}{1} + \frac{m_0}{4} + \frac{I_1}{1^2},$$

$$M_{1,3} = M_{2,4} = M_{3,1} = M_{4,2} = \frac{\rho S l}{3} - \frac{\rho I}{1} + \frac{m_0}{4} - \frac{I_1}{1^2},$$

$$M_{3,3} = M_{4,4} = \frac{\rho S l}{3} + \frac{\rho I}{1} + \frac{m_0}{4} + \frac{I_1}{1^2}. \quad (17)$$

Остальные компоненты матриц равны нулю. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} [M]^{-1}[K] &= [K] \\ [M]^{-1}[\tilde{K}] &= [\tilde{K}] \\ [M]^{-1}[\bar{K}] &= [\bar{K}], \\ [M]^{-1}[G] &= [G] \end{aligned} \quad (18)$$

тогда (16) примет вид:

$$\{\ddot{U}\} + [G]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} + [\tilde{K}]\{U^3\} + [\bar{K}]\{U_\mu^2 U_\nu\} = 0, \quad (19)$$

## 2. Нелинейные формы колебаний

Нелинейные нормальные формы (ННФ) дают возможность упростить без потери точности и наглядности решения задач нелинейной динамики

ки. Основа этого метода заключается в том, что система нелинейных дифференциальных уравнений заменяется одним уравнением.

Принимаем, что при движении по ННФ обобщенные координаты изменяются синхронно. Тогда все фазовые координаты можно выразить через одну, выбранную произвольно, базовую пару фазовых координат [7]:  $p$  – перемещение и  $q = \dot{p}$  – скорость. Представим ННФ в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [\gamma] \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

где  $V = \dot{U}$  – обобщенные скорости,

$[\gamma]$  – матрица коэффициентов разложения перемещений и скоростей в степенной ряд по фазовым координатам:

$$p_n(p, q) = \gamma_{n,1}p + \gamma_{n,2}q + \gamma_{n,3}p^2 + \gamma_{n,4}pq + \gamma_{n,5}q^2 + \gamma_{n,6}p^3 + \gamma_{n,7}p^2q + \gamma_{n,8}pq^2 + \gamma_{n,9}q^3,$$

$$q_n(p, q) = \gamma_{4+n,1}p + \gamma_{4+n,2}q + \gamma_{4+n,3}p^2 + \gamma_{4+n,4}pq + \gamma_{4+n,5}q^2 + \gamma_{4+n,6}p^3 + \gamma_{4+n,7}p^2q + \gamma_{4+n,8}pq^2 + \gamma_{4+n,9}q^3, \quad (21)$$

где  $n = \overline{1,4}$  – номера степеней свободы в ННФ.

Определим коэффициенты линейной части (21). Согласно работе [5]

$$\gamma_{n,1} = \frac{\zeta_n \delta_{4+J} - \zeta_{4+J} \delta_n}{\zeta_J \delta_{4+J} - \zeta_{4+J} \delta_J}, \gamma_{n,2} = \frac{\zeta_J \delta_n - \zeta_n \delta_J}{\zeta_J \delta_{4+J} - \zeta_{4+J} \delta_J}, \quad (22)$$

где  $\zeta$  и  $\delta$  – действительная и мнимая части собственных векторов линейной части системы (19),

$J$  – номер базовой степени свободы.

Продифференцировав (21) получим:

$$\dot{p}_n(p, q) = \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial q} \dot{q},$$

$$\dot{q}_n(p, q) = \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial q} \dot{q}, \quad (23)$$

обозначим

$$\begin{aligned} \{ \dot{q}_j \} &= -[G] \{ q_j \} - [K] \{ p_j \} - [\tilde{K}] \{ p_j^3 \} - \\ &- [\bar{K}] \{ p_{\nu, \mu}^2 \}_j = \{ W_j \{ p_j \}, \{ q_j \} \}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $j$  – номер формы. Подставив (24) в (23) получим:

$$\dot{p}_{j,n} = q_{j,n} = \frac{\partial p_{j,n}}{\partial p_{j,1}} q_{j,J} + \frac{\partial p_{j,n}}{\partial q_{j,J}} W_{j,J}(p_{j,J}, q_{j,J}),$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{j,n} &= W_{j,n}(p_{j,J}, q_{j,J}) = \frac{\partial q_{j,n}}{\partial p_{j,J}} q_{j,J} + \\ &+ \frac{\partial q_{j,n}}{\partial q_{j,J}} W_{j,J}(p_{j,J}, q_{j,J}), \end{aligned} \quad (25)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $p^\mu q^\nu$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов матрицы  $[\gamma]$ . В результате решения этой системы получаем ННФ.

Вычисленные коэффициенты ННФ (21) подставляем в базовое (J-е) уравнение системы (19). В результате получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение движения по ННФ:

$$\dot{q} + B_1 q + B_2 p + B_3 p^3 + B_4 p^2 q + B_5 p q^2 + B_6 q^3 = 0, \quad (26)$$

$$\text{где } B_1 = \sum_{n=1}^4 G_{j,n} \gamma_{4+n,1} + \sum_{n=1}^4 K_{j,n} \gamma_{n,1},$$

$$B_2 = \sum_{n=1}^4 G_{j,n} \gamma_{4+n,2} + \sum_{n=1}^4 K_{j,n} \gamma_{n,2},$$

$$B_3 = \sum_{n=1}^4 G_{j,n} \gamma_{4+n,6} + \sum_{n=1}^4 K_{j,n} \gamma_{n,6} + \sum_{n=1}^4 \tilde{K}_{j,n} \gamma_{n,1}^3 + \sum_{n=1}^4 \bar{K}_{j,n} \gamma_{\nu,1} \gamma_{\mu,1}^2,$$

$$B_4 = \sum_{n=1}^4 G_{j,n} \gamma_{4+n,7} + \sum_{n=1}^4 K_{j,n} \gamma_{n,7} + \sum_{n=1}^4 3 \tilde{K}_{j,n} \gamma_{n,1}^2 \gamma_{n,2} + \sum_{n=1}^4 \bar{K}_{j,n} (\gamma_{\mu,1}^2 \gamma_{\nu,2} + 2 \gamma_{\nu,1} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\mu,2}),$$

$$B_5 = \sum_{n=1}^4 G_{j,n} \gamma_{4+n,8} + \sum_{n=1}^4 K_{j,n} \gamma_{n,8} + \sum_{n=1}^4 3 \tilde{K}_{j,n} \gamma_{n,2}^2 \gamma_{n,1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^4 \bar{K}_{j,n} (\gamma_{\mu,2}^2 \gamma_{\nu,1} + 2 \gamma_{\nu,2} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\mu,2}). \quad (27)$$

Значения индексов  $\mu$  и  $\nu$  в зависимости от номера перемещения  $n$  для формул (27) даны в таблице.

Таблица

n	1	2	3	4
v	1	2	3	4
μ	2	1	4	3

Поскольку по условиям симметрии у нас исчезли слагаемые с перемещениями по направлению z квадратичные члены в (19) и (26) отсутствуют.

**2. Численный анализ колебаний**

На рис. 3 представлена ННФ колебаний ротора на подшипниках качения. Размеры ротора следующие:  $l = 0,5$  м, диаметр вала  $d = 0,025$  м,  $m_0 = 10$  кг,  $I_1 = 0,1$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_0 = 0,2$  кг·м<sup>2</sup>,  $\omega = 628,3$  рад/с. Параметры подшипников таковы:  $R_1 = 0,01600$  м,  $R_2 = 0,02753$  м,  $R_K = 0,00593$  м,  $d_{Ш} = 0,01151$  м,  $N = 7$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\sigma = 0,3$ ,  $Q = 300$  Н.

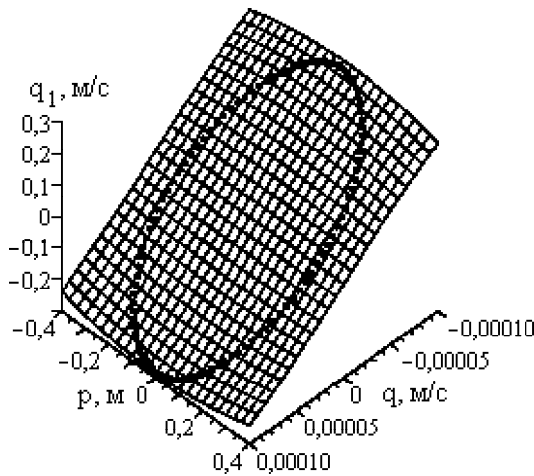


Рис. 3. ННФ ротора на шарикоподшипниках

Проверка правильности построения ННФ выполнена численным интегрированием полной системы уравнений движения (19) при задании начальной точки фазой траектории на поверхности нормальной моды. Фазовая траектория на ННФ показана точечной линией на рис. 3.

Для исследования амплитудно-частотной характеристики этих колебаний применен метод гармонического баланса [8]. На рис. 4 показаны скелетные кривые для первой, второй и третьей форм колебаний ротора. Первая частота кратная, она соответствует колебаниям ротора в двух плоскостях.

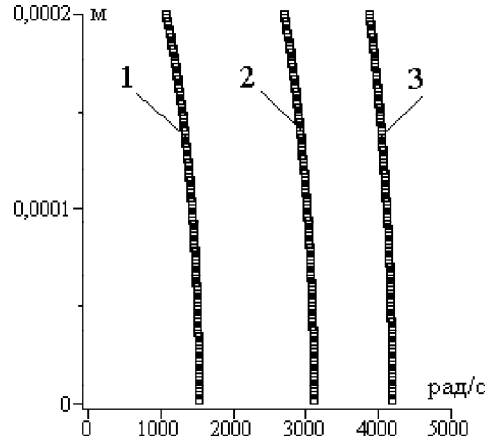


Рис. 4. Скелетные кривые ротора. Номер линии соответствует номеру ННФ

**Заключение**

Разработана методика исследования нелинейных колебаний жесткого ротора на подшипниках качения. Построены нелинейные нормальные формы и фазовые траектории системы. Исследованы скелетные кривые системы. С ростом амплитуды частоты колебаний уменьшаются потому, что кривизна канавок качения в шарикоподшипниках переменная. При увеличении амплитуды колебаний шарики перемещаются в область большей кривизны контактирующей поверхности, то есть в зону меньшей жесткости зоны контакта.

**Перечень ссылок**

1. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов / Ф.М. Диментберг. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 248с.
2. Определение собственных частот колебаний электродвигателя, связанных с нелинейной упругостью подшипников/ Л.З. Новиков// Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. — 1961. — №6. — С.84–91.
3. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. — Киев: Наук.думка, 1977. — 340с.
4. Nonlinear Normal Modes of a Rotating Shaft Based on the Invariant Manifold Method / M.Legrand, D.Jiang, C.Pierre, S.W.Shaw// International Journal of Rotating Machinery. — 2004. — Vol.10, №4.— P 319–335.
5. Нелинейные нормальные формы колебаний систем с гироскопическими силами / К.В. Аврамов, К. Пьерр, Н.С. Ширяева// Доповіді Національної Академії Наук України. — 2006.— №1. — С.7-10.
6. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж.Гудьер.— М.: Наука, 1975.—576с.

7. Normal modes for nonlinear vibratory systems / S.W. Shaw, C. Pierre // J. Sound and Vibr.— 1993.— №164.— P.85–124.

8. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах / Т.Хаяси. — М.: Мир, 1968. — 432 с.

Поступила в редакцию 26.05.2010 г.

**S.V. Filipkovsky**

**ROTOR OSCILLATION NONLINEAR NORMAL MODES A ON THE BALL BEARINGS**

*Отримано модель коливань симетричного ротора на підшипниках кочення. Сили пружності підшипника описані теорією контакту Герца. Нелінійна залежність сили від переміщень розкладена в степеневий ряд. Враховано гіроскопічні моменти диска, і розподілена маса вала. Математична модель коливань ротора зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Для аналізу отриманої системи застосовується метод нелінійних нормальних форм Шоу-П'єрра. Отримано форми коливань ротора й фазові траєкторії системи, побудовані кістякові криві нелінійних коливань ротора.*

**Ротор, підшипник кочення, контактна взаємодія, метод нелінійних нормальних форм, фазові траєкторії, кістякові криві**

*The model of oscillations of a symmetrical rotor on ball bearings is obtained. Elastic forces of the bearing are characterized by the Hertz contact theory. The non-linear relationship of force by movements is represented by the power series. Gyroscopic torques and the allocated mass of the shaft are taken into account. This model is reduced to a system of ordinary differential second-kind equations. To research of a system the method of nonlinear normal modes of Shaw and Pierre is applied. The modes of road with disk oscillations and phase paths are obtained. The skeletal curves of nonlinear oscillations of a rotor are constructed.*

**Rotor, ball bearing, contact interaction, nonlinear normal modes method, phase paths, skeletal curves**