УДК 514.174

Канд. фіз.-мат. наук І. Г. Величко, А. І. Зінченко

Запорізький національний університет

АНАЛІТИЧНИЙ СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ КРОКУ ШТАМПУВАННЯ ПРИ ОДНОРЯДНОМУ РЕГУЛЯРНОМУ РОЗКРОЇ

Пропонується ефективний спосіб визначення кроку штампування при регулярному однорядному розкрої прямокутного листа на однотипні фігури. Спосіб оснований на сформульованій та доведеній у статті теоремі про довжину криволінійної трапеції.

Ключові слова: *регулярний розкрій, крок штампування, криволінійна трапеція, метод множників Лагранжа, вузлова пряма.*

Постановка проблеми

Одним з основних шляхів зниження витрат листового прокату на автомобільних та авіаційних заводах є вдосконалювання технологічних процесів розкрою. Для машинобудівних заводів з великими обсягами штампувальних робіт інтерес викликають такі види штампування, у яких деталі в листах розташовуються регулярно, оскільки для цих видів штампування вдається забезпечити високу продуктивність штампувальних верстатів.

У цій статті розглядається випадок однорядного регулярного розкрою. При такому виді розкрою лист розрізається на полоси, і на кожній полосі в один ряд розміщуються однаково орієнтовані фігури так, щоб відстань між сусідніми фігурами була не менша за міждетальну перемичку. Якщо замість фігур розглядати еквідистантні їм фігури, розширені на половину міждетальної перемички, то такі фігури на листі вже можна розміщати щільно.

При такому способі штампування кількість фігур, які можна розмістити на листі, дорівнює добутку кількості полос, на які розрізається лист, на кількість фігур в одній полосі. Ці величини є функціями від кута повороту фігур у листі відносно деякого початкового положення. Проблема, розв’язку якій присвячена ця стаття, є спосіб знаходження кількості фігур у полосі залежно від кута повороту фігур.

Актуальність теми

Задачі оптимального розміщення геометричних об’єктів зустрічаються в найрізноманітніших областях науки та техніки: у проектуванні машин, механізмів, радіоелектронних пристроїв, інтегральних схем, технологічних процесів, у фізиці та хімії. Кількість наукових публікацій цієї тематики швидко зростає, особливо останнім часом. Існує широкий спектр методів розв’язку таких задач: класичні (методи лінійного цілочислового та нелінійного програмування, такі як, наприклад, методи, основані на теорії R-функцій) та розроблені відносно недавно (генетичний алгоритм, метод Лагранжевих релаксацій, пошук із заборонами, метод комашиної колонії і т. ін.). Усі названі методи є наближеними і дають оптимальне розміщення тільки для окремих класів задач. Пошук точних оптимальних розв’язків для інших класів задач є актуальною проблемою.

Аналіз останніх досліджень

Теоретичним дослідженням в області розміщення однакових простих геометричних об’єктів на площині присвячені роботи Л. Ф. Тота [1], Хеша [2], В. А. Залгаллера [3], виконані в 50-ті роки минулого сторіччя. Швидке поширення ЕОМ у подальші роки дозволило створювати алгоритми розв’язку важливих для практики задач розкрою на ЕОМ. Огляд досліджень у цій області до 1970 р. можна знайти у відомій монографії Л. В. Канторовича та В. А. Залгаллера [4]. Розробці ефективних алгоритмів розв’язку за допомогою ЕОМ важливих для практики задач про щільне регулярне укладання однотипних фігур у прямокутних листах, рулонах і площинах присвячені роботи Л. Б. Белякової [5, 6], Ю. Г. Стояна [7, 8]. З останніх робіт, присвячених проблемі оптимального розкрою матеріалів на фігурні заготівлі, відзначимо [9, 10].

Формулювання цілей статті. При обчисленні кількості фігур, які можна розмістити в одній полосі, найбільш складною, з математичної точки зору, є задача обчислення кроку штампування.

Крок штампування можна визначати як найменшу відстань, на яку можна зсунути фігуру в напрямку штампування, так, щоб вона не мала спільних точок зі своїм вихідним положенням.

Але, зазвичай, при розв’язанні цієї задачі розглядають дві сусідні фігури, одну з них відносять на деяку відстань від першої в напрямку штампування, так, щоб вони напевне не мали спільних точок, і починають зсувати другу фігуру до першої, на кожному з кроків перевіряючи умови відсутності спільних точок. Фігури, для яких відстані, які обчислюються цими двома способами, збігаються, називаються роздільними. Наприклад, усі опуклі фігури є роздільними.

У промисловості найбільше використовуються листові заготівки, контур яких складається з відрізків та дуг кіл. Оскільки при побудові еквідистант нові розширені контури також складаються з відрізків та дуг кіл, у цій статті ми також обмежимося розглядом таких контурів і будемо вважати фігури роздільними.

Ціллю статті є пошук ефективного алгоритму точного визначення для регулярного однорядного розкрою на однотипні фігури крок штампування у випадку, коли фігури є роздільними, а їхні розширені контури складаються з відрізків та дуг кіл.

Основна частина

Розглянемо криволінійну трапецію, верхня та нижня основи якої є відрізками, паралельними осі OX, а ліва та права бокові сторони є дугами кіл радіусів r та R відповідно. Нехай центр лівого кола є точка $A(a,b)$, а правого кола $B(a+s,b+h)$, де $h>0$.

Визначимо ширину цієї фігури в напрямку осі OX. Запишемо параметричні рівняння бокових сторін цієї трапеції:
рівняння лівої сторони

$$\begin{cases} x = f_1(\varphi) = a + r\cos\varphi, \\ y = g_1(\varphi) = b + r\sin\varphi \end{cases}, \qquad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$$

та рівняння правої сторони

$$\begin{cases} x = f_2(\psi) = a + s + R\cos\psi, \\ y = g_2(\psi) = b + h + R\sin\psi \end{cases}, \qquad \psi_1 \le \psi \le \psi_2 .$$

Потрібну довжину трапеції можна обчислити як

$$\max_{\substack{\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2 \\ \psi_1\le\psi\le\psi_2}} f_2(\psi) - f_1(\varphi)$$

за умови, що

$$g_1(\varphi) = g_2(\psi).$$

Для розв’язання цієї задачі складемо функцію Лагранжа

$$F(\varphi,\psi,\lambda) = f_2(\psi) - f_1(\varphi) + \lambda\left(g_2(\psi) - g_1(\varphi)\right) =$$
$$= s + R\cos\psi - r\cos\varphi + \lambda\left(h + R\sin\psi - r\sin\varphi\right).$$

Знайдемо частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial F}{\partial\psi} = -R\sin\psi + \lambda R\cos\psi = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = r\sin\varphi - \lambda r\cos\varphi = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $\lambda = tg\psi = tg\varphi$, а, отже, $\psi = \alpha\varphi$, де $\alpha = \pm 1$.

З урахуванням цього умова $g_1(\varphi) = g_2(\psi)$ набуде вигляду $h + R\sin\alpha\varphi = r\sin\varphi$. Оскільки $\sin\alpha\varphi = \alpha\sin\varphi$, то звідси випливає, що

$$\sin\varphi = \frac{h}{r - \alpha R}.$$

Якщо дуги кіл вигнуті в різні сторони, то $\alpha = -1$, і матимемо, що

$$\sin\varphi = \frac{h}{r+R}, \quad \sin\psi = -\frac{h}{r+R},$$
$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = -\cos\varphi .$$

Кінці відрізка, який визначає довжину криволінійної трапеції, лежать на прямій $y = b + r\dfrac{h}{r+R} = \dfrac{(b+h)r + bR}{r+R}$. Геометрична інтерпретація цього факту така: горизонтальна пряма, на якій лежить відрізок екстремальної довжини (будемо називати її напіввузловою), ділить відрізок, який сполучає центри кіл, у відношенні радіусів цих кіл.

Якщо криволінійна трапеція є опуклою фігурою та опорна пряма має спільні точки з трапецією, то довжина трапеції визначається за формулою

$$f_2(\psi) - f_1(\varphi) = a + R\cos\psi - r\cos\varphi =$$
$$= a + (R+r)\sqrt{1 - \frac{h^2}{(r+R)^2}} =$$
$$= a + \sqrt{(r+R+h)(r+R-h)}.$$

Якщо криволінійна трапеція не є опуклою або опорна пряма не перетинається з трапецією, то довжина відрізка визначається максимальною з довжин верхньої та нижньої сторін трапеції.

Перейдемо до розгляду трапеції, у якої бокові дуги вигнуті в одному напрямку. У цьому випадку

$$\alpha = 1, \quad \sin\varphi = \sin\psi = \frac{h}{r-R},$$
$$\cos\psi = \cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\psi} .$$

Ордината напіввузлової прямої, яка визначає відрізок екстремальної довжини, визначається за формулою

$$y = b + r\frac{h}{r-R} = \frac{(b+h)r + b(-R)}{r + (-R)}.$$

Зауважимо, що цю формулу також можна трактувати як ділення відрізка у відношенні $r:(-R)$.

Оскільки вище було визначено значення $\sin\varphi = \sin\psi = \frac{h}{r-R}$, то

$$\cos\psi = \cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\psi}.$$

Знак «+» перед радикалом беремо в тому випадку, коли обидва кола вигнуті вправо, а знак «-», коли вигнуті вліво. Після цього можна визначити довжину екстремального відрізка. Наприклад, якщо дуги вигнуті вправо, то довжина екстремального відрізка дорівнює

$$f_2(\psi) - f_1(\varphi) = a + R\cos\psi - r\cos\varphi =$$
$$= a + (R-r)\sqrt{1 - \frac{h^2}{(r-R)^2}} =$$
$$= a + signum(R-r)\sqrt{(|R-r|+h)(|R-r|-h)}.$$

Якщо дуги вигнуті вліво, то довжина екстремального відрізка дорівнює

$$f_2(\psi) - f_1(\varphi) =$$
$$= a + signum(r-R)\sqrt{(|r-R|+h)(|r-R|-h)}.$$

Окремо потрібно розглянути випадок, коли дуги кіл однаково орієнтовані і мають однакові радіуси. У цьому випадку наведені вище формули не можна застосовувати, оскільки там буде ділення на нуль.

З урахуванням цього умова $g_1(\varphi) = g_2(\psi)$ при $R = r$ набуде вигляду $h + r\sin\varphi = r\sin\varphi \Leftrightarrow r = 0$. Отже, якщо центри кіл лежать на одній горизонтальній прямій, то довжина перетину узагальненої трапеції однакова для всіх перетинів, а якщо центри кіл не лежать на одній прямій, то екстремальний відрізок буде збігатися з однією з основ трапеції.

Тепер розглянемо випадок, коли одна сторона трапеції є дугою кола, а інша – відрізком. Будемо вважати спочатку, що ліва сторона є дугою кола.

Запишемо параметричні рівняння бокових сторін цієї трапеції: рівняння лівої сторони

$$\begin{cases} x = f_1(\varphi) = a + r\cos\varphi, \\ y = g_1(\varphi) = b + r\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$$

та рівняння правої сторони

$$\begin{cases} x = f_2(t) = s + t\cos\alpha, \\ y = g_2(t) = p + t\sin\alpha, \end{cases} \qquad t_1 \le t \le t_2.$$

Потрібну довжину трапеції можна обчислити як

$$\max_{\substack{\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ t_1 \le \psi \le t_2}} f_2(t) - f_1(\varphi)$$

за умови, що

$$g_1(\varphi) = g_2(t).$$

Знайдемо частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \cos\alpha + \lambda\sin\alpha = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = r\sin\varphi - \lambda r\cos\varphi = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $\lambda = tg\varphi = -ctg\alpha$. Геометрично ця умова виражає той факт, що дотична до кола, проведеного в точці перетину кола з прямою, яка визначає екстремальний перетин, паралельна протилежній стороні трапеції, а радіус, проведений у цю точку, перпендикулярний протилежній стороні трапеції.

Сформулюємо ці результати у вигляді теореми:

Означення. Вузловою прямою для узагальненої трапеції називається пряма, яка містить одну з його основ.

Означення. Напіввузлом узагальненої трапеції назвемо точку, якщо вона існує, яка

- у випадку, коли бокові сторони є дугами кіл з радіусами r та R, сполучає центри кіл і ділить цей відрізок у відношенні $r:R$ (при цьому для угнутих кіл треба брати радіус зі знаком «мінус», а для опуклих – зі знаком «плюс»).
- у випадку, коли одна з бокових сторін є дугою кола, а інша – відрізком, є перетином дуги кола з радіусом, який перпендикулярний цьому відрізку.

Означення. Напіввузловою прямою для узагальненої трапеції називається пряма, паралельна її основам, яка проходить через напіввузлову точку, у випадку, якщо вона має спільні точки з прямою.

Теорема (про довжину узагальненої трапеції). Довжина узагальненої трапеції дорівнює довжині відрізка, який є перетином трапеції з вузловою прямою або з напіввузловою прямою.

Таким чином, для того, щоб визначити довжину фігури в заданому напрямку, потрібно розділити її на узагальнені трапеції прямими, паралельними цьому напрямку, які проходять через вузлові точки фігури або є дотичними до контуру фігури. Для кожної з отриманих узагальнених трапецій потрібно знайти довжину, використавши теорему про довжину узагальненої трапеції, та взяти максимальну з отриманих довжин.

Висновки

У статті вводиться поняття узагальненої трапеції як фігури, обмеженої двома паралельними відрізками (основами трапеції) та двома дугами кіл (які можуть мати і нульову кривину). Доводиться теорема, яка дозволяє знайти довжину найбільшого відрізка, який паралельний основам трапеції і кінці якого лежать на контурі трапеції.

Отримані результати можна застосовувати для розв'язання задач пошуку оптимальних карт розкрою. У подальшому викликає інтерес узагальнення цієї задачі на випадок, коли бокові сторони трапеції є кривими, відмінними від дуг та відрізків.

Перелік посилань

1. Тот Л. Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве / Л. Ф. Тот. – М. : Физматгиз, 1958. – 363 с.
2. Heesch H. Flachenschluss / H. Heesch, O.Kienzle. – Berlin (Gottingen) Heidelberg: Springer-Verlag, 1963. – 141 p.
3. Залгаллер В. А. Об одном необходимом признаке плотнейшего расположения фигур/ В. А. Залгаллер // Успехи математических наук. – 1953. – № 4. – Т. 8. – С. 153–162.
4. Канторович Л. В. Рациональный раскрой промышленных материалов/ Л. В.Канторович, В. А.Залгаллер. – Новосибирск : Наука, 1971. – 299 с.
5. Белякова Л. Б. Об оптимальном раскрое листового проката / Л. Б. Белякова // Автоматизация технологического проектирования при помощи ЭЦВМ. – М. : Машиностроение, 1968. – 223 с.
6. Белякова Л. Б. Построение простейших решетчатых укладок дисков на плоскости / Л. Б. Белякова, Н. Р. Галактионова // Комбинаторно-алгебраические и вероятностные методы дискретного анализа. – Горький : Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1989. – 156 с.
7. Стоян Ю. Г. Размещение геометрических объектов/ Ю. Г. Стоян. – К. : Наукова думка, 1975. – 175 с.
8. Стоян Ю. Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов / Ю. Г. Стоян, Н. И. Гиль. – К. : Наукова думка, 1976. – 247 с.
9. Аввакумов В. Д. Оптимальное размещение плоских объектов произвольной геометрической формы / В. Д. Аввакумов // Информационные технологи. – 2009. – № 5. – С. 31–35.
10. Скобцов Ю. А. К вопросу о применении метаэвристик в решении задач рационального раскроя и упаковки / Ю. А. Скобцов, В. Н. Балабанов // Вісник Хмельницького національного університету. – 2008. – Т. 1. – № 4. – С. 205–217.

Поступила в редакцию 10.01.2011

Величко И.Г., Зинченко А.И. Аналитический способ определения шага штамповки при однорядном регулярном раскрое

Предлагается эффективный способ определения шага штамповки при регулярном однорядном раскрое прямоугольного листа на однотипные фигуры. Способ основан на сформулированной и доказанной в статье теореме о длине криволинейной трапеции.

Ключевые слова: *регулярный раскрой, шаг штамповки, криволинейная трапеция, метод множителей Лагранжа, узловая прямая.*

Velichko I., Zinchenko A. Analytical method for determining step in forming row regular cutting

An efficient method for determining step in forming a regular single-row cutting a rectangular sheet to the same type of figure. The method is based on formulated and proved in the theorem on the length of the curvilinear trapezoid.

Key words: *regular cutting, stamping step, curvilinear trapezoid, the method of Lagrange multipliers, the nodal line.*