

УДК 620.179.1:519.24(045)

С.Р. Игнатович, М.В. Карускевич, Е.Ю. Дорошенко

Национальный авиационный университет, Украина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ КЛАСТЕРОВ ДЕФОРМАЦИОННОГО РЕЛЬЕФА НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАКИРУЮЩЕГО СЛОЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ

Процесс формирования деформационного рельефа (ДР) на поверхности плакирующего слоя алюминиевых сплавов описывается с позиций образования и объединения кластеров вторичной фазы (ВФ) на плоских решетках с заданным координационным числом. Предложенная вероятностная модель описывает количество кластеров разной «массы» от общей концентрации ячеек ВФ. Теоретические результаты подтверждаются данными численного эксперимента. Обоснован критерий предельной концентрации кластеров, при которой процесс их накопления выходит на стадию насыщения. Расчетные оценки предельной концентрации хорошо согласуются с экспериментальными данными по насыщению ДР на поверхности плакирующего слоя при циклическом нагружении.

Ключевые слова: деформационный рельеф, поверхность, циклическое нагружение, кластеры, усталость, слияние кластеров.

Введение

В авиационных конструкциях, например, для обшивки самолета, в качестве материала используются листовые алюминиевые сплавы, покрытые тонким плакирующим слоем из технического чистого алюминия. При циклическом нагружении поверхность такого слоя испытывает интенсивное знакопеременное пластическое деформирование, что приводит к формированию на нем деформационного рельефа (ДР). Возникновение ДР обусловлено локальными изменениями шероховатости поверхности из-за эволюции дислокационной структуры плакирующего слоя и при регистрации оптическими средствами проявляется в виде темных участков на контрастных черно-белых фотографиях (рис. 1).

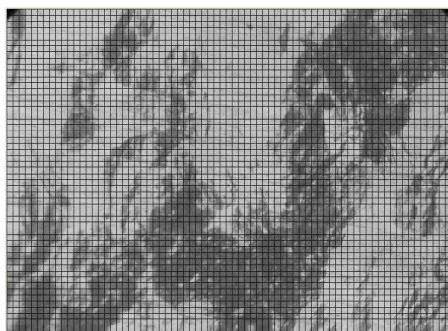


Рис. 1. Фотография ($\times 500$) участка поверхности со следами ДР (темные участки) с наложением сетки квадратных ячеек

Количественная оценка нагруженности и поврежденности участка поверхности площадью A производится по критерию насыщенности ДР [1]

$$D = \frac{S}{A}, \quad (1)$$

где S – площадь поверхности со следами ДР (суммарная площадь темных пятен на фотографии).

Как показывают экспериментальные исследования, формирование и распространение локального пластического деформирования на поверхности плакирующего слоя осуществляется с первых циклов нагружения. С увеличением числа циклов нагружения площадь поверхности, занятая следами ДР, возрастает (рис. 2). При этом наблюдается три стадии изменения насыщенности ДР: на начальном этапе наработки скорость изменения параметра D относительно небольшая, затем происходит увеличение интенсивности накопления ДР с последующим ее уменьшением. Последний этап развития ДР можно трактовать как стабилизацию насыщения поверхностного пластического деформирования.

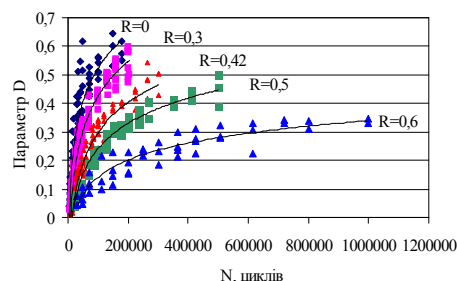


Рис. 2. Изменение насыщенности ДР с наработкой для циклического нагружения при различных асимметриях цикла нагружения [2]

Особенности эволюции ДР при циклическом нагружении достаточно полно изучены экспериментально [2-5]. В настоящей работе изложена теоретическая трактовка данного процесса на основании вероятностной модели формирования кластеров вторичной фазы в двухфазной системе.

1. Исходные предпосылки

Рассмотрим задачу о формировании кластеров ДР по механизму развития двухфазной системы, где первичная фаза (ПФ) – поверхность без следов ДР (светлый фон на черно-белых фотографиях), а в качестве вторичной фазы (ВФ) выступают области локального пластического деформирования, проявляющиеся на фотографиях черным цветом.

Как показывают экспериментальные исследования, эволюция такой двухфазной системы характеризуется постепенным увеличением суммарной площади ВФ, что свидетельствует о постепенном процессе ее образования и развития. Предполагаем, что процесс формирования ДР реализуется как образование первичных носителей поверхностной пластической деформации с линейным размером a , их накоплением на поверхности с последующим объединением и образованием ассоциаций – кластеров*.

Рассмотрим поверхность площадью A , на которой формируется ДР. Разобьем данную поверхность на N ($N \gg 1$) плотно упакованных ячеек с линейным размером a (рис.2). Параметры A , N и a связаны очевидным соотношением $A = Na^2$. В каждой ячейке может быть размещен только один первичный носитель ДР и она считается представителем ВФ. Если две или более таких ячеек оказываются рядом, они образуют кластер с «массой», равной количеству входящих в него ячеек. Массу кластера будем характеризовать параметром s ($s = 1, 2, \dots$), равным количеству ячеек ВФ в кластере, а количество кластеров массой s обозначим n_s .

Каждая ячейка в области A окружена соседними, примыкающими к ней ячейками. Количество ближайших «соседей» z назовем координационным числом сетки, которое будет определяться формой ячеек и способом их упаковки. Например, для треугольных ячеек с компоновкой по сторонам (по вписанной окружности) $z = 3$, а с компоновкой по сторонам и по вершинам (по описанной окружности) $z = 12$. Для квадратных, соответственно, $z = 4$ и $z = 8$. Следует отметить, что принятая схема дискретизации ячейками области A может быть трансформирована в классические системы связей или узлов [6,7].

2. Вероятностная модель

Пусть среди N ячеек на однородно деформируемой поверхности случайным образом рассея-

но n ячеек ВФ ($n < N$), концентрация которых определяется как $x = n/N$. При случайной выборке ячеек объемом z вероятность нахождения ровно s ячеек ВФ в такой выборке описывается биномиальным распределением:

$$p_z(s) = C_z^s x^s (1-x)^{z-s}, \quad (2)$$

где C_z^s - число сочетаний из z элементов по s .

При малых значениях x ($x \leq 0,1$) распределение (2) асимптотически приближается к распределению Пуассона, а при $zx(1-x) > 9$ – к нормальному [8]. Для распределения Пуассона запишем

$$p_z(s) = \frac{(zx)^s}{s!} \exp(-zx). \quad (3)$$

Используя приближение $p_z \rightarrow n_s/N_z$, где $N_z = N/z$ – максимальное количество групп по z ячеек в совокупности N , на основании (3) получим

$$\frac{n_s}{N} = \frac{z^{s-1}}{s!} x^s \exp(-zx). \quad (4)$$

Формула (4) определяет зависимость количества кластеров n_s ($s \leq z$) от концентрации ячеек ВФ x и полностью соответствует вероятностной модели формирования ассоциаций из s рассеянных не взаимодействующих повреждений [9].

Из формулы (3) следует, что максимальная вероятность наличия кластера массы s реализуется при концентрации

$$x_m = \frac{s}{z}. \quad (5)$$

Согласно (4) с увеличением общей концентрации ячеек ВФ с фиксированным значением z количество кластеров увеличивается до максимального значения при x_m , после чего происходит уменьшение n_s . Уменьшение количества кластеров при $x > x_m$ может быть обусловлено только их объединением и образованием новых кластеров большей массы.

Вполне очевидно, что образование кластера представляет собой случайное событие. В связи с этим формула (4) определяет усредненную функциональную зависимость количества кластеров от общей концентрации повреждений. При $x \ll 1$ наличие ассоциаций из нескольких повреждений маловероятно, и имеет место система из единичных ($s=1$) рассредоточенных ячеек ВФ. Если x

настолько мало, что $\exp(zx) \approx 1$, то из формулы (3) следует $n_1/N \rightarrow x$. Это определяет линейный характер зависимости $n_1(x)$.

Отклонения зависимости $n_1(x)$ от прямой линии при некотором значении концентрации x_a означает начало объединения ячеек ВФ и образование первых кластеров. Параметры x_a и x_m , характеризующие основные этапы процесса формирования и развития кластеров, в терминологии теории перколяции называются, соответственно, порог агрегации и критическая концентрация агрегации [10]. Кроме этих характеристических показателей концентрации используется параметр x_c – порог перколяции, при котором образуется бесконечный кластер, пронизывающий всю область ячеек (связей).

Отметим, что рассматриваемая теоретическая модель не описывает образование бесконечного кластера, так как в ней масса конечных кластеров s ограничивается координационным числом решетки z . В то же время известно, что порог протекания x_c при нарушении связей наиболее чувствителен к числу ближайших соседей z и значительно менее чувствителен к другим параметрам решеток (табл. 1).

Таблица 1

Основные характеристики перколяции различных типов плоских решеток [7]

Тип решеток	z	x_c	zx_c	Γ_a^*	x_*
Треугольная	3	0,65	1,95	1,86	0,35
Квадратная	4	0,5	2,0	2,15	0,3
Шестиугольная	6	0,35	2,1	2,63	0,25

Из представленных в табл. 1 данных следует, что для плоских решеток произведение zx_c близко к 2. Согласно (5) это значение соответствует максимуму зависимости $n_2(x)$ при $x_m \approx x_c$. Следовательно, формирование пронизывающего кластера осуществляется при концентрации ячеек ВФ, соответствующей максимуму концентрации кластеров с $s = 2$.

3. Результаты численного эксперимента

Для подтверждения адекватности выражения (4) был проведен численный эксперимент по моделированию процессов случайного появления, накопления и формирования кластеров ВФ различной массы на плоской сетке ячеек с заданными значениями z [11]. Участок поверхности представлялся в виде совокупности N плотно упакованных ячеек. Для различных значений координационного числа z выбиралась форма ячеек и принималось, что их объединение реализуется

по соприкасающимся сторонам. Так, для треугольников $z = 3$, для квадратов $z = 4$ и т.д.

В процессе моделирования поэтапно часть ячеек переводились в категорию ВФ. Расположение таких ячеек на исследуемом поле N являлось случайным. В автоматизированном режиме регистрировалось количество кластеров различной массы n_s при текущем значении концентрации ячеек ВФ x .

Результаты численного эксперимента показывают, что на начальной стадии формирования ВФ формула (4) достаточно точно описывает зависимости концентрации кластеров различной массы ($s \leq z$) от x (рис. 3). При $z = 3$ и $z = 4$ для n_1 соответствие теоретических и экспериментальных результатов имеет место при $x \leq 0,15$, а для n_2 при $x \leq 0,1$. Для n_3 имеем $x \leq 0,3$ ($z = 3$) и $x \leq 0,25$ ($z = 4$) (рис. 3).

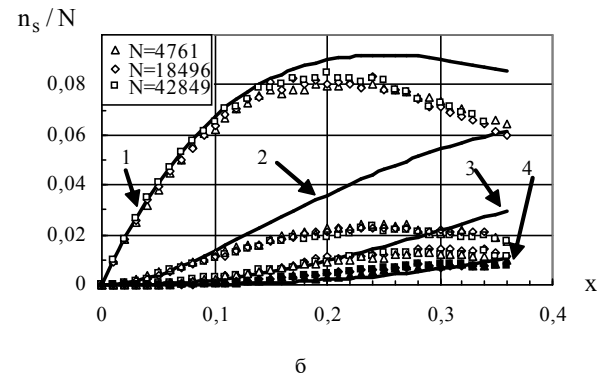
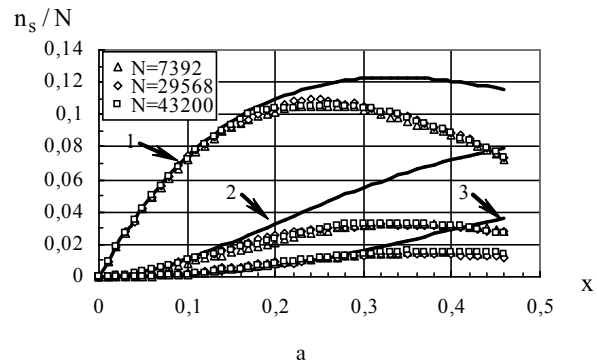


Рис. 3. Зависимости концентрации кластеров ВФ различной массы: $n_1(x)/N$ (1); $n_2(x)/N$ (2); $n_3(x)/N = 3$ (3); $n_4(x)/N$ (4) для плоских ячеек с $z = 3$ (а) и $z = 4$ (б). Линии – расчет по формуле (4), точки – результаты моделирования с различным значением общего количества ячеек N

Отклонение результатов имитационного моделирования от теоретической зависимости (4) объясняется тем, что при больших значениях концентрации x интенсивно начинают формировать

ся кластеры с массой $s \gg z$. Численный эксперимент показал, что для решеток с $z = 3$ и $z = 4$ за счет массового объединения ячеек ВФ даже при сравнительно малых значениях общей концентрации ($x \geq 0,1$) образуются кластеры большой массы: n_{10} , n_{20} и даже n_{50} .

При моделировании получено, что размер ячеек и, следовательно, общее количество ячеек на исследуемой поверхности N практически не влияет на процессы образования и роста кластеров (рис. 3).

4. Критерии насыщенности кластеров

Результаты экспериментальных исследований изменения насыщенности ДР при циклическом нагружении показывают наличие стадийности процесса (рис. 2). Аналогичная стадийность имеет место и при формировании кластеров ВФ в зависимости от x . Для $n_s(x)$ ($s > 1$) на начальном этапе скорость кластерообразования плавно увеличивается с последующей стабилизацией и даже уменьшением (рис. 3). Рассмотрим явление стабилизации роста ВФ в рамках предложенной теоретической модели с целью обоснования соответствующих характеристических соотношений.

Общее количество кластеров с $s \leq z$ на поле из N ячеек при фиксированном x определяется на основании (4) как

$$\sum_{s=1}^z \frac{n_s}{N} = \frac{\exp(-zx)}{z} \sum_{s=1}^z \frac{(zx)^s}{s!}. \quad (6)$$

Сумма в правой части выражения (6) с достаточным приближением для $x < 1$ может быть записана в виде

$$\sum_{s=1}^z \frac{(zx)^s}{s!} \cong \exp(zx) - 1. \quad (7)$$

С учетом (7) формула (6) примет вид

$$\sum_{s=1}^z n_s = \frac{N}{z} [1 - \exp(-zx)]. \quad (8)$$

Из выражения (8) следует, что на поле из N ячеек предельное количество кластеров ВФ n_s с массой $s \leq z$ при $x \leq 1$ ограничено значением:

$$\sum_{s=1}^z n_s \leq \frac{N}{z} [1 - \exp(-z)]. \quad (9)$$

Таким образом, насыщение процесса формирования кластеров вполне обосновано и описывается формулой (8).

В качестве критерия насыщения можно использовать среднее расстояние между кластерами r , которое определяется через их концентрацию c_A на площади A соотношением

$$r = \frac{1}{\sqrt{c_A}} = \left(\sum_{s=1}^z \frac{n_s}{Na^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Объединив выражения (10) и (8), запишем

$$r_a = \frac{r}{a} = \left(\sum_{s=1}^z \frac{n_s}{N} \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{z}{1 - \exp(-zx)}}, \quad (11)$$

где r_a – расстояние между кластерами, нормированное к характерному размеру ячейки.

Отметим, что из формулы (11) при условии формирования пронизывающего кластера $zx_c \cong 2$

[8] следует предельное значение r_a^* (табл.1), близкое по значению к концентрационному критерию $K \approx e$ [12]. Данный критерий, равный среднему расстоянию между соседними рассеянными дефектами и нормированный к их размеру, характеризует переход от стадии рассеянного к стадии локализованного разрушения.

Результаты численного эксперимента по развитию ВФ, в ходе которого определялось количество кластеров различной массы, а по формуле (10) – среднее расстояние между ними, подтверждают адекватность теоретического выражения (11) (рис. 4). Однако, как показывает моделирование, при относительно небольших значениях общей концентрации x формируются достаточно большие кластеры с массой $s > z$. Следовательно, при описании кластерообразования помимо расстояния между отдельными кластерами необходимо учитывать и их размеры (массу).

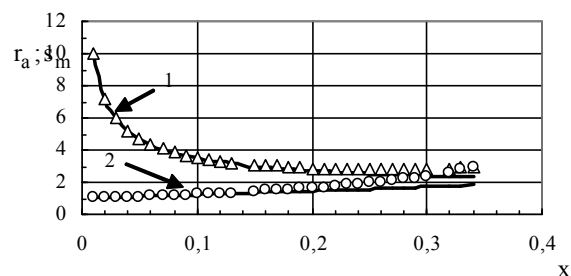


Рис. 4. Зависимости r_a (1) и s_m (2) от x , полученные при численном моделировании (светлые точки) и рассчитанные по формулам (11) и (12) (линия) при $z = 4$

Средняя масса кластера s_m является одной из ключевых характеристик в теории перколя-

ции. Параметр s_m определяется суммой всех ячеек, входящих в кластеры, деленной на общее количество кластеров. Для кластеров с массой $s \leq z$ запишем

$$s_m = \frac{Nx}{z \sum_{s=1}^z n_s}. \quad (12)$$

Подставив в (12) выражение (8), получим

$$s_m = \frac{zx}{1 - \exp(-zx)}. \quad (13)$$

Результаты расчетов параметра s_m по формуле (13) хорошо согласуются с данными численного эксперимента для различных z на начальной стадии формирования кластеров (рис. 4). Отклонение экспериментальных значений средней масса кластеров от зависимости (13) имеет место при повышенных значениях x , что обусловливается появлением кластеров с массой $s > z$, которые не учитываются формулой (13).

При малых значениях концентрации ВФ ($x \ll 1$) из (13) следует очевидное приближение $s_m \rightarrow 1$. С увеличением x ($x \leq 0,3$) для различных z зависимость (13) можно описать функцией

$$s_m = \frac{1}{1 - bx}. \quad (14)$$

где коэффициент b соответствует интенсивности роста средней массы кластера в точке $x = 0$. По данным численного эксперимента для различных z получено (коэффициент регрессии $R^2 = 0,985$):

$$b = 0,3322z + 0,5583. \quad (15)$$

Принимаем, что предельное состояние (насыщение процесса образования кластеров) будет характеризоваться предельной концентрацией ВФ x_* , при которой реализуется условие предельного слияния кластеров — среднее расстояние между ними равно среднему размеру кластеров: $r_a = s_m$.

С учетом формул (11) и (14) получим трансцендентное уравнение для определения предельной концентрации ячеек ВФ x_* , при которой реализуется массовое объединение кластеров:

$$z(1 - bx_*)^2 = 1 - \exp(-zx_*). \quad (16)$$

Решение уравнения (16) дает значения предельной концентрации объединения x_* для различных значений параметра z (табл. 1).

Следует отметить, что полученные значения x_* соотносятся для различных z со значениями порога протекания x_c (табл. 1). Зависимость между этими параметрами линейна и имеет вид

$$x_c = 3x_* - 0,4. \quad (17)$$

При условии $zx_c \approx 2$ [7] из (17) следует

$$x_* \approx \frac{2}{3z} + 0,133. \quad (18)$$

При $z = 3; 4; 6$ из (18) следует: $x_* = 0,36; 0,3$ и $0,24$, что хорошо согласуется с экспериментальными значениями, соответствующими стадии насыщения ДР (рис. 2).

Заключение

Процесс формирования и развития ДР на поверхности плакирующего слоя можно описывать с помощью вероятностной модели накопления и объединения кластеров ВФ в двухфазной системе с использованием плоской сетки ячеек различной геометрической формы. Адекватность модели подтверждается результатами численного эксперимента. Теоретические значения критической концентрации кластеров при их массовом объединении согласуются с экспериментальными значениями параметра насыщенности ДР при насыщении.

Перечень ссылок

1. Пат. № 29683 Україна, МПК G01N 3/32. Спосіб визначення залишкового ресурсу елементів конструкцій за станом деформаційного рельєфу поверхні плакуючого шару / Ігнатович С.Р., Карускевич М.В., Карускевич О.М.; Власник НАУ. - № 200709909; заявл. 04.09.2007; опубл. 25.01.2008, Бюл. № 2. — 3 с.: іл.
2. Карускевич М.В. Оцінка довговічності плакованих алюмінієвих сплавів при асиметричному циклічному навантажуванні / М.В. Карускевич, А.Д. Погребняк, Т.П. Маслак [та ін.] // Вісник НАУ. — 2009. — С. 52 — 56.
3. Ігнатович С.Р. Діагностика усталості плакированих алюмінієвих сплавів / С.Р. Ігнатович, М.В. Карускевич, О.М. Карускевич, В.М. Пантелеев, // Вестник НТТУ «КПИ»: Машиностроение, — 2002. — 43. — С. 53-55.
4. Ігнатович С.Р. Еволюція поврежденності сплава Д-16АТ у концентратора на стадії до зародження усталостної тріщини / С.Р. Ігнатович, О.М. Карускевич, М.В. Карускевич // Авиационно-космическая техника и технология: Вып. 4 (12) - Харьков: ХАИ, 2004 — С. 29-32.
5. Ігнатович С.Р. Моніторинг утоми конструкційних алюмінієвих сплавів / С.Р. Ігнатович, М.В. Карускевич, О.М. Карускевич, С.В. Хиж-

- няк, О.С. Якушенко /Вісник НАУ -2004. - №1(19). - С.88 - 91.
6. Шкловский Б.И. Электронные свойства легированных полупроводников / Б.И. Шкловский, А.Л. Эфрос. - М.: Наука, 1979.-416 с.
7. Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка / А.Л. Эфрос. - М.: Наука, 1982.- 176 с.
8. Кукса Л.В. О законах распределения микродеформаций в двухфазных поликристаллических сплавах при простом и сложном нагружениях / Л.В. Кукса, А.А. Лебедев, Б.И. Ковальчук // Пробл. прочности. - 1986. - № 1. - С. 7-11.
9. Игнатович С.Р. Критические значения концентрации накопленных рассеянных повреждений / С.Р. Игнатович // Пробл. прочности. - 1995. - № 4. - С. 61-68.
10. Челидзе Т.Л. Методы теории перколяции в механике разрушения / Т.Л. Челидзе // Механика тв. тела. - 1983. - № 6. - С. 114-123.
11. Кучер А.Г. Математическая модель поверхностного структурного повреждения материала на основе теории перколяции / А.Г. Кучер, А.С. Якушенко, В.Е. Мильцов // Авиационно-космическая техника и технология: Вып. 9 (45) - Харьков: ХАИ, 2007 – С. 20-30.
12. Петров В.А. О механизме и кинетике макроразрушения / В.А. Петров // Физика тв. тела. - 1979. - 2112. - , С. 3681-3686.

Поступила в редакцию 01.06.2011

С.Р. Игнатович, М.В. Карускевич, Є.С. Дорошенко. Математична модель формування кластерів деформаційного рельєфу на поверхні плакованого шару конструкційних алюмінієвих сплавів

Процес формування деформаційного рельєфу (ДР) на поверхні плакованого шару алюмінієвих сплавів описується з позицій виникнення та об'єднання кластерів вторинної фази (ВФ) на плоских решітках з заданим координаційним числом. Імовірнісна модель, що запропонована, описує кількість кластерів різної «маси» від загальної концентрації чарунок ВФ. Теоретичні результати підтверджуються даними чисельного експерименту. Обґрунтований критерій граничної концентрації кластерів, при якій процес їх накопичення виходить на стадію насичення. Розрахункові оцінки граничної концентрації добре погоджуються з експериментальними даними з насиченістю ДР на поверхні плакучого шару при циклічному навантажуванні.

Ключові слова: деформаційний рельєф, поверхня, циклічне навантажування, кластери, втома, злиття кластерів.

S.R. Ignatovich, M.V. Karuskevich, E.Yu. Doroshenko. Mathematical model of the deformation relief clusters formation on the surface of alclad aluminium alloys

The process of the deformation relief (DR) formation on the surface of alclad aluminium alloys is described from the standpoint of nucleation and coalescence of the second phase (SP) clusters on the flat grates with certain co-ordinating number. Proposed probabilistic model describes the number of the clusters with different "mass" on the general concentration of the SP cells. Theoretical results are confirmed by the numeral experiment. The criterion of the maximum clusters concentration that correspondent to the stage of their saturation has been grounded. Estimated by the calculation maximum concentration corresponds with experimental data of the deformation relief intensity on the surface of the clad layer under the cyclic loading.

Key words: deformation relief, surface, cyclic loading, clusters, fatigue, coalescence of clusters.