

УДК 539.3

Канд. техн. наук Ю. В. Мастиновський, Д. І. Анпілогов

Запорізький національний технічний університет, м. Запоріжжя

## ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПОВЕРХНЕВОГО УШКОДЖЕННЯ В КОНСТРУКЦІЯХ ОБОЛОНКОВОГО ТИПУ

Проаналізовано збурення полів переміщень в перетині ушкодженої оболонки при розкритті тріщини. Визначено параметр, який інтегрально описує спотворення полів переміщень. Оцінено відносно зменшення жорсткості ушкоджених оболонок з різними геометричними параметрами. Одержані результати відповідають рівню чутливості сучасних вимірювальних приладів.

**Ключові слова:** ушкоджена оболонка, збурення полів переміщень, відносно зменшення жорсткості.

### Вступ

Конструктивні елементи оболонкового типу досить поширені в авіадвигунобудуванні. Важливою є науково-технічна задача ідентифікації ушкоджень таких елементів як в процесі виробництва, так і на початкових стадіях експлуатації. Методи вібраційної діагностики [1], придатні для вирішення цієї задачі, обґрунтовано для стрижневих конструкцій [2, 3] або пластин [4], але розповсюдження цих результатів на оболонки є безпідставним.

Ідентифікація ушкодження можлива при аналізі спектру коливань конструкції, але зв'язок параметрів спектру з величиною ушкодження для конструкцій оболонкового типу залишається невизначеним. Головною задачею для розв'язання зазначеної проблеми є аналіз полів переміщень та їх збурень при виникненні ушкодження, а також побудова оцінки відносного зменшення жорсткості конструкції, яке відбувається при виникненні ушкодження, на основі аналізу збурень полів переміщень. Тому актуальним залишається аналіз напружено-деформованого стану циліндричних оболонок з ушкодженням.

### Постановка задачі

Розглядається статична задача теорії пружності для циліндричної оболонки радіусом  $a$ , товщиною  $h$  і центральним кутом  $\psi_{\max}$ , яку згинають зовнішнім моментом  $M_0$ , рівномірно розподіленим вздовж контурних твірних оболонки (рис. 1).

Для довгих оболонок за умови нехтування крайовими ефектами достатньо розглянути напружено-деформований стан елемента довжини, який міститься між парою паралельних площин, перпендикулярних до твірної. Цей елемент в перетині є кільцевим сектором (рис. 2).

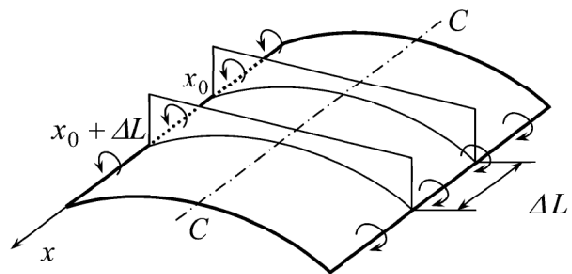


Рис. 1. Згин циліндричної оболонки зовнішнім моментом

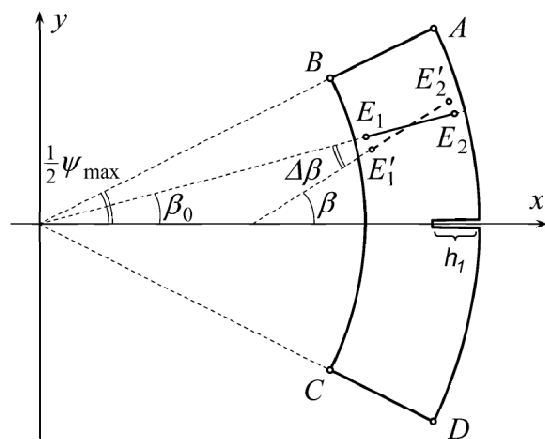


Рис. 2. Перетин циліндричної оболонки

При виникненні ушкодження у вигляді поверхневої тріщини на опуклій поверхні оболонки вздовж напрямку  $CC$  (рис. 1) цей сектор доповнюється вирізом глибини  $h_1$  на опуклій ділянці  $AD$  контуру, який обмежує область кільцевого сектору (рис. 2).

Розв'язання задач теорії пружності для чистого згину таких секторів (без вирізу чи з вирізом) можливо при застосуванні методу комп-

лексних потенціалів М. І. Мухелішвілі [5] з використанням функцій, які конформно відображають кільцеві сектори на одиничне коло [6]. За умови, що такі функції відомі, за результатами, викладеними в [5], можна побудувати поля переміщень.

Розглянемо відрізок  $E_1E_2$ , проведений вздовж одного з радіусів кільцевого сектору (см. рис. 2). Цей відрізок представляє радіальний перетин кільцевого сектору. Кут  $\beta_0$  називатимемо кутом розташування радіального перетину. Нехай після деформації згину цей радіальний перетин займає положення  $E_1'E_2'$ . Це положення можна визначити, використовуючи розв'язки відповідних граничних задач. Кут  $\Delta\beta$  називатимемо кутом повороту радіального перетину. Визначимо залежність кута повороту радіального перетину від кута його розташування,  $\Delta\beta(\beta_0)$ , та поставимо задачу дослідження впливу відносної глибини  $\gamma = h_1/h$  вирізу на параметри цієї залежності. Далі, використовуючи ці результати, визначимо кутові розміри зони збурень полів переміщень, зумовлені вирізом, та побудуємо оцінку відносного зменшення жорсткості при розкритті тріщини.

#### Аналіз полів переміщень

Нехай поле переміщень має компоненти  $u, v$ . Введемо безрозмірне поле переміщень  $(U, V) = \frac{1}{A}(u, v)$ , де  $A = 3M_0a^2/(\mu h^3)$ ,  $\mu$  – модуль зсуву. Оберемо  $N_p = 20$  точок недеформованого радіального перетину  $E_1E_2$  з координатами  $(x_i, y_i)$ . Очевидно, після деформації ці точки матимуть координати  $(x_i + AU_i; y_i + AV_i)$ . При розташуванні радіального перетину далеко від вирізу ці точки групуватимуться також навколо деякої прямої. Нехай її рівняння

$$y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg} \beta. \quad (1)$$

Тут  $\beta$  – кут, який визначає орієнтацію перетину після деформування кільцевого сектору. Коефіцієнти  $k, b$  забезпечують мінімальність відхилення прямої (1) від системи зміщених точок:

$$S \equiv \frac{1}{2} \sum \{ k(x_i + AU_i) + b - y_i - AV_i \}^2 \rightarrow \min.$$

Розв'язуючи відповідну систему  $\partial S / \partial k = 0$ ,  $\partial S / \partial b = 0$ , знаходимо

$$k = \frac{N_p \cdot \sum(x_i + AU_i)(y_i + AV_i) - \sum(x_i + AU_i) \cdot \sum(y_i + AV_i)}{N_p \cdot \sum(x_i + AU_i)^2 - \{\sum(x_i + AU_i)\}^2}. \quad (2)$$

Зауважимо, при зникненні навантаження (тобто при  $A = 0$ ) вираз (2) приймає значення

$$k_0 = \frac{N_p \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{N_p \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \operatorname{tg} \beta_0, \text{ яке відповідає}$$

відсутності деформацій. Використовуючи цю обставину, а також обмежуючись утриманням лінійних членів, запишемо ряд Маклорена функції  $k(A)$  (2) у вигляді:

$$k = k_0 + \left. \frac{\partial k}{\partial A} \right|_{A=0} \cdot A. \quad (3)$$

Тоді для кута  $\Delta\beta$  повороту перетину  $E_1E_2$  з кутом розташування  $\beta_0$  маємо

$$\Delta\beta = \beta - \beta_0 \approx \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta_0 = k - k_0 = \left( a \cdot \left. \frac{\partial k}{\partial A} \right|_{A=0} \right) \cdot \frac{A}{a},$$

де похідна  $a \cdot \left( \left. \frac{\partial k}{\partial A} \right|_{A=0} \right)$  може бути обчислена безпосередньо з (2). Типовий графік залежності  $(a \cdot \Delta\beta) / A = f(\beta_0)$  зображено на рис. 3.

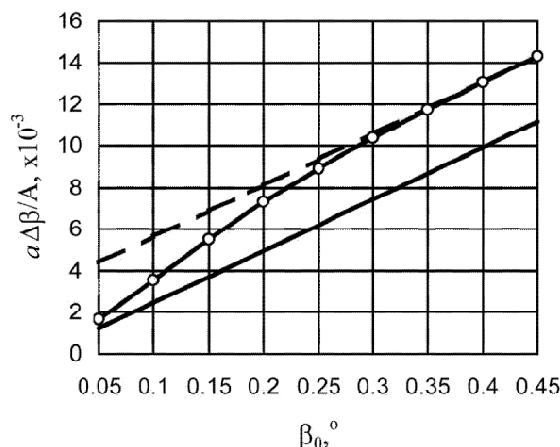


Рис. 3. Накопичення кутів повороту радіальних перетинів

Для кінців  $E_1, E_2$  перетинів прийнято  $\sqrt{x^2 + y^2} = (a \pm 0,1h)$ . За відсутності вирізу (суцільна лінія) накопичення кута повороту перетину відбувається лінійно. При виникненні вирізу (лінія з маркерами) спочатку відбувається прискорене накопичення, а далі відновлюється лінійний характер цієї залежності, причому з таким самим кутовим коефіцієнтом, як і за відсутності вирізу. Відновлення лінійної залежності при певному значенні  $\beta_0$  значить, що кутові розміри зони збурення полів переміщення при виникненні вирізу є меншими за  $\beta_0$ . Ці кутові розміри,

як бачимо, слід оцінювати десятими долями кутового градусу. Подальше накопичення кутів повороту перетинів можна асимптотично описати залежністю

$$(a \cdot \Delta\beta)/A = p\beta_0 \quad (4)$$

при відсутності вирізу, або залежністю

$$(a \cdot \Delta\beta')/A = p\beta_0 + q \quad (5)$$

при наявності вирізу. Кутовий коефіцієнт  $p$  може бути обчислений за допомогою методу найменших квадратів з використанням точок суцільної кривої рис. 3, а вільний член  $q$  – тим самим методом з використанням точок кривої з маркерами; ці точки треба розташовувати поза зоною впливу вирізу на напружено-деформований стан кільцевого сектору. Втім, розрахунки за наведеною схемою доводять, що величину  $p$  можна обчислити також залучаючи методи опору матеріалів. Результат в припущенні поздовжніх зусиль має вигляд

$$p \approx p_0 = \frac{1}{6(1+\nu)} \cdot \frac{\alpha^2}{1 - \alpha / \ln \frac{2+\alpha}{2-\alpha}} \quad (6)$$

Тут через  $\alpha = h/a$  позначено відносну товщину сектору;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу. Навпаки, визначити вільний член  $q$ , виходячи з уявлень опору матеріалів, неможливо, оскільки область застосування цих уявлень, очевидно, не розповсюджується на випадки наявності вирізу.

Багаторазові розрахунки накопичених кутів повороту радіальних перетинів з одержанням даних, подібних до представлених на рис. 3, дозволяють скласти уявлення про поведінку вільного члену  $q$  в залежності від відносної глибини вирізу при різних відносних товщинах кільцевих секторів. По-перше, вільний член  $q$  збільшується при збільшенні відносної глибини вирізу  $\gamma$ : що глибший виріз, то більшою мірою спостерігається порушення рівномірності накопичення кутів повороту перетинів. По-друге, виявлений ефект є тим більш сильним, чим більшою є відносна товщина кільцевого сектору. Ці обидві обставини представлено графічно на рис. 4.

#### Оцінка відносного зменшення жорсткості

Визначимо жорсткість кільцевого сектору як коефіцієнт пропорційності між моментом  $M_0$  та взаємним кутом  $2\Delta\beta$  (чи  $2\Delta\beta'$ ) повороту граничних радіальних перетинів (тобто таких перетинів, для яких кути розташування становлять  $\beta_0 = \pm \frac{1}{2}\psi_{\max}$ ; цим перетинам відповідають

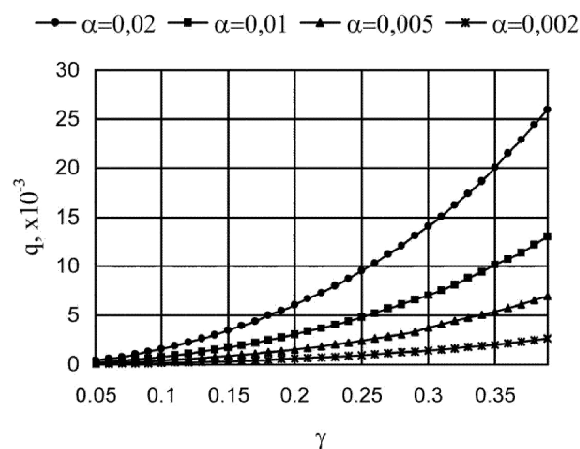


Рис. 4. Залежність параметру  $q$  від відносної глибини вирізу

ділянки  $AB$  та  $CD$  на рис. 2). Тоді жорсткість  $C_1$  сектору без вирізу можна визначити співвідношенням формально аналогічним до закону Гука:  $M_0 = C_1 \cdot 2\Delta\beta$ . При використанні асимптотики (4) маємо:

$$M_0 = C_1 \cdot p\psi_{\max} \cdot \frac{A}{a}.$$

Аналогічно, жорсткість  $C_2$  сектору з вирізом визначимо співвідношенням  $M_0 = C_2 \cdot 2\Delta\beta'$ . При використанні асимптотики (5) маємо:

$$M_0 = C_2 \cdot (p\psi_{\max} + 2q) \cdot \frac{A}{a}.$$

Тоді для відносного зменшення жорсткості одержуємо

$$\frac{C_1 - C_2}{C_1} = \frac{2q}{p\psi_{\max} + 2q}.$$

Практика розрахунків за цією формулою дозволяє помітити, що  $p\psi_{\max} \gg 2q$ . Остаточного одержуємо

$$\frac{C_1 - C_2}{C_1} = \frac{2q}{p\psi_{\max}}. \quad (7)$$

Для конкретного кільцевого сектору параметри  $\psi_{\max}$ ,  $a$ ,  $h$  і, отже, з урахуванням (6), величина  $p$  залишаються сталими незалежно від відносної глибини вирізу. Тому можна стверджувати, що поведінка вільного члену  $q$ , яка представлена на рис. 4, надає уявлення про залежність відносного зменшення жорсткості  $\frac{C_1 - C_2}{C_1}$  від відносної глибини вирізу для кільцевого сектору з певною геометрією.

**Приклад ідентифікації ушкодження**

Наведемо приклад застосування формули (7).

Нехай є сектор з параметрами  $\psi_{\max} = 45^\circ$ ,  $\alpha = h/a = 0,01$ . З (6) маємо  $p = 0,0248$ .

Нехай при вимірюванні параметрів вібро-сигналу виявилось, що відносний рівень сталої складової становить  $D_0 = 1,1\%$ , а коефіцієнт гармонічних спотворень дорівнює  $G = 0,27\%$ . Ці значення на 2–3 порядки перебільшують чутливість сучасних вимірювальних приладів. Так, плата віброаналізу NIPXI-4461 має 24-розрядний АЦП з власними гармонійними спотвореннями не більше -107 дБ (0,00044%). Це дозволяє вимірювати коефіцієнт гармонік 0,003% з погрешністю не більше  $\pm 0,0005\%$  [8]. Калібратор-вимірювач нелінійних спотворень СК6-20 вимірює коефіцієнт гармонік починаючи з 0,001% [9].

При здійсненні гармонічного аналізу розв'язку рівняння вільних коливань білінійного осцилятора встановлено [7], що постійна складова коливань та коефіцієнт гармонічних спотворень пов'язані з відносним зменшенням жорсткості співвідношеннями

$$D_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_1}, \quad G = \frac{2}{9\pi} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_1}.$$

Використовуючи надані значення, отримуємо

$$\frac{C_1 - C_2}{C_1} = \pi D_0 \approx \frac{9\pi}{2} G \approx 0,035. \quad \text{Тоді з (7) маємо:}$$

$$q = \frac{p\psi_{\max}}{2} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_1} = \frac{0,0248 \cdot 45^\circ}{2} \cdot 0,035 \approx 0,0195^\circ.$$

За графіком рис. 4 (верхня крива) знаходимо  $\gamma = h_1/h = 0,35$ . Таким чином, попри удавану малість, відносне зменшення жорсткості відповідає параметрам вібросигналу, надійно вимірюваним в розглядуваному діапазоні, і є придатним для оцінки величини ушкодження.

**Висновки**

В роботі з використанням розв'язку відповідної граничної задачі теорії пружності для кільцевого сектору, який моделює перетин циліндричної оболонки та має виріз, що моделює поверхневу тріщину, проаналізовано збурення полів переміщень при розкритті тріщини. Визначено кутові розміри зони збурень та проаналізовано накопичення кутів повороту радіальних перетинів в секторах без вирізу та з вирізом. Це надало змогу ввести параметр, який в інтегральному сенсі описує спотворення полів переміщень.

З використанням цього параметру одержано просту оцінку відносного зменшення жорсткості оболонки на згин при розкритті тріщини, придатну для інженерних застосувань. Ця оцінка узагальнює розв'язки граничних задач для кільцевих секторів з різними геометричними параметрами. Одержані результати відповідають рівню чутливості сучасних вимірювальних приладів.

**Список літератури**

1. Постнов В. А. Определение повреждений упругих систем путем математической обработки частотных спектров, полученных из эксперимента / В. А. Постнов // Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 155–160.
2. Бовсуновский А. П. Диагностика закрывающихся трещин в стержневых элементах при нелинейных резонансах методом варьирования асимметрией вынуждающей силы / А. П. Бовсуновский, О. А. Бовсуновский // Проблемы прочности. – 2010. – № 4. – С. 50–61.
3. Damage detection method in complicated beams with varying flexural stiffness / Kan Feng, Zheng Li, Gui-yun Gao, Xian-yue Su // Applied Mathematics and Mechanics. – 2011. – Vol. 32, № 4. – P. 469–478.
4. Huang C. S. Vibrations of rectangular plates with internal cracks or slits / C.S. Huang, A.W. Leissab, C.W. Chan // International Journal of Mechanical Sciences. – 2011. – Vol. 53, № 6. – P. 436–445. (метод Ритца).
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мухелишвили Н. И. – Изд. 5-е, испр. и доп. – М.: «Наука», 1966. – 707 с.
6. Анпилогов Д. И. Построение конформного отображения кольцевых секторов на единичный круг / Анпилогов Д. И. // Вестник Харьк. нац. ун-та. Сер. «Матем., прикл. матем. и мех.». – 2007. – № 790, вып. 57. – С. 146–157.
7. Анпилогов Д. И. Расчет относительного уменьшения жесткости поврежденного кольцевого сектора на основе анализа поля перемещений / Д. И. Анпилогов // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46, № 8. – С. 90–105.
8. Пивак А. В. Измерение коэффициента гармоник напряжения сигнала, заданного во временной области [Електрон. ресурс] / А. В. Пивак. – Електрон. дані. – Режим доступу: <http://www.prist.ru/info.php/articles/kni.htm>. – Назва з екрана.
9. Калибратор-измеритель нелинейных искажений СК6-20 [Ел. ресурс]. – Ел. дані. – Режим доступу: [http://www.npcentre.ru/view\\_item.php?id=63](http://www.npcentre.ru/view_item.php?id=63). – Назва з титул. екрана.

Поступила в редакцію 24.11.2011

**Мастиновский Ю.В., Анпилов Д.И. Идентификация поверхностного повреждения в конструкциях оболочечного типа**

*Проанализировано возмущение полей перемещений в сечении поврежденной оболочки при раскрытии трещины. Определен параметр, который интегрально описывает искажение полей перемещений. Оценено относительное уменьшение жесткости поврежденных оболочек с разными геометрическими параметрами. Полученные результаты соответствуют уровню чувствительности современных измерительных приборов.*

**Ключевые слова:** поврежденная оболочка, возмущение поля перемещений, относительное уменьшение жесткости.

**Mastinivskiy Yu., Anpilov D. Identification of surface damage in shell-type constructions**

*Displacement fields perturbation in a section of damaged shell when crack disclosing is analyzed. Parameter that describes the displacement fields distortion integrally is defined. The relative decrease of stiffness of damaged shells with different geometric parameters is estimated. The obtained results correspond to the sensitivity level of modern instrumentation.*

**Key words:** damaged shell, displacement fields perturbation, relative decrease of stiffness.