УДК 539.374.001.8.

Д-р техн. наук В. В. Чигиринский, А. Ю. Матюхин

Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ОСАДКЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ВНЕШНЕЙ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Получено обобщенное уравнение равновесия для осесимметричной задачи в цилиндрических координатах, решение которого в аналитическом виде позволяет определить функцию касательных напряжений от координат очага деформации. Определены составляющие тензора напряжений для плоской осесимметричной задачи. Исследование напряженного состояния толстостенной трубы при торцевой осадке с учетом радиального внешнего и внутреннего подпора. Показано влияние радиального подпора на распределение нормальных и касательных напряжений.

Ключевые слова: *напряжение, деформация, пластичность, прочность, радиальная нагрузка.*

Введение

Осадка полых тел вращения в осевом направлении используется для получения изделий разного назначения: бандажей, колец. Осадка в контейнерах используется для получения точных размеров заготовки по внешнему и внутреннему диаметру. В порошковой металлургии, в условиях неоднородного всестороннего сжатия, получают цилиндрические изделия в условиях внешнего и внутреннего подпора. Решение этой задачи имеет теоретическое и практическое значения.

Предлагаемая математическая модель напряженного состояния толстостенной трубы при осадке, учитывает контактное трение, фактор формы, с учетом внешнего и внутреннего подпора.

Постановка задачи

Замкнутая постановка задачи в условиях плоской деформации для тел вращения имеет вид:

уравнение равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{\rho}=0\,;\ \frac{\partial\tau_{z\rho}}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{z\rho}}{\rho}=0\,,\qquad(1)$$

условие пластичности:

$$\left(\sigma_\rho-\sigma_z\right)^2+4\tau_{\rho z}^2=4k^2\,,\qquad(2)$$

уравнение связи:

$$\frac{\sigma_\rho-\sigma_z}{2\tau_{\rho z}}=\frac{\xi_\rho-\xi_z}{\gamma_{\rho z}}\,,\qquad(3)$$

условие несжимаемости:

$$\xi_\rho+\xi_z=0\,,\qquad(4)$$

уравнение неразрывности скоростей деформаций:

$$\frac{\partial^2\xi_\rho}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\xi_z}{\partial\rho^2}=\frac{\partial^2\gamma_{\rho z}}{\partial z\partial\rho}\,.\qquad(5)$$

Граничные условия задаются в напряжениях, с учетом тригонометрического распределения напряжений на контакте, т. е.

$$\tau_n=-k\cdot\sin\left(\mathrm{A}\Phi-2\alpha\right),\qquad(6)$$

где σ,τ – нормальное и касательное напряжение; τ_n – контактное касательное напряжение; α – угол наклона площадки; k – сопротивление пластическому сдвигу; Φ – функция координат ρ, z; A – постоянная величина.

Выражения (3)...(5) не используются при решении задачи, но имеют место для обоснования схемы плоского течения.

Решение задачи

В работе [1] представлено обобщенное уравнение равновесия, где определяющей функцией является касательное напряжение $\tau_{\rho z}$

$$\frac{\partial^2\tau_{\rho z}}{\partial\rho^2}-\frac{\partial^2\tau_{\rho z}}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\pm\frac{1}{\rho}\sqrt{k^2-\tau_{\rho z}^2}\right)=\pm2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\rho}\left(\sqrt{k^2-\tau_{\rho z}^2}\right).\qquad(7)$$

Аналитическое решение последнего уравнения позволяет найти функциональную зависимость касательного напряжения от координат очага деформации. Для удовлетворения граничных условий (6) имеем:

$$\tau_{\rho z} = k \cdot \sin \text{А}\Phi . \qquad (8)$$

Такая подстановка позволяет линеаризовать уравнение. Используем фундаментальную зависимость в виде:

$$k = H_\sigma \exp\theta , \qquad (9)$$

где H_σ – функция координат ρ, z; θ – показатель экспоненты, как функция, координат. Из (9) следует , что сопротивление пластической деформации является величиной переменной.

Касательное напряжение, которое удовлетворяет дифференциальное уравнение (7) имеет вид:

$$\tau_{\rho z} = \left(\frac{C_2}{\rho} + C_1 \rho \right) \cdot \exp\theta \sin \text{А}\Phi \qquad (10)$$

при выполнении условия $\theta_\rho = -\text{А}\Phi_z$; $\theta_z = \text{А}\Phi_\rho$.

Подставляя (10) в уравнение равновесия (1) и интегрируя, получим:

$$\sigma_\rho = \left(\frac{C_2}{\rho} + C_1 \rho \right) \exp\theta \cdot \cos \text{А}\Phi - \\ -2C_1 \cdot I_1 + \sigma_0 + f(z) + C, \qquad (11)$$

$$\sigma_z = -\left(\frac{C_2}{\rho} + C_1 \rho \right) \exp\theta \cdot \cos \text{А}\Phi - \\ -2C_1 \cdot I_2 + \sigma_0 + f(\rho) + C. \qquad (12)$$

Интегралы

Можно показать, что $I_1 = I_2$. Равенство интегралов определяется особенностями гармонических функций. В выражениях (11), (12) имеет место постоянные C_1, C_2 , которые можно определить из граничных условий.

Анализ полученных результатов

Запишем граничные условия (рис. 1).

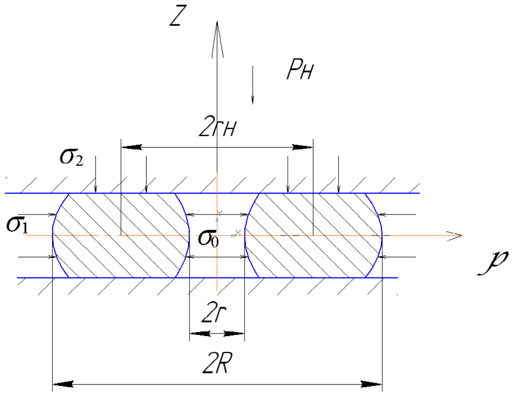

Рис. 1. Схема осадки толстостенной трубы

1. При $\rho = r$, $z = \dfrac{h}{2}$, $\theta = \theta_0$, $\text{А}\Phi = \text{А}\Phi_0$,

$$\sigma_\rho - \sigma_z = 2k_0 + \sigma_0 = 2k_0 \xi_0 ; \ \xi_0 = 1 + \frac{\sigma_0}{2k_0} .$$

2. При $\rho = R$, $z = \dfrac{h}{2}$, $\theta = \theta_1$, $\text{А}\Phi = \text{А}\Phi_1$,

$$\sigma_z - \sigma_\rho = 2k_1 + \sigma_1 = 2k_1 \xi_1 ; \ \xi_1 = 1 + \frac{\sigma_1}{2k_1} .$$

При подстановке предельных условий имеем систему уравнений:

$$2k_0 \xi_0 = 2\left(C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} \right) \cdot \exp\theta_0 \cdot \cos \text{А}\Phi_0 ;$$

$$2k_1 \xi_1 = 2\left(C_1 \cdot R + \frac{C_2}{R} \right) \cdot \exp\theta_1 \cdot \cos \text{А}\Phi_1 ,$$

где ξ_1, ξ_2 – значения которые определяют величину подпора на внешнем и внутреннем диаметре.

Решая систему относительно C_1, C_2 , имеем:

$$C_1 = \frac{1}{R^2 - r^2} \left[R \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp(\theta_1) \cdot \cos \text{А}\Phi_1} - r \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp(\theta_0) \cdot \cos \text{А}\Phi_0} \right];$$

$$C_2 = \frac{R \cdot r}{R^2 - r^2} \left[R \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp(\theta_0) \cdot \cos \text{А}\Phi_0} - r \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp(\theta_1) \cdot \cos \text{А}\Phi_1} \right].$$

Подставляя исходные выражения в (11), (12), получим:

$$\sigma_\rho = -\left[\frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos \text{А}\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos \text{А}\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_0) \right] \cdot \cos \text{А}\Phi + k_0, \qquad (13)$$

$$\sigma_z = -3\left[\frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos \text{А}\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos \text{А}\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_0) \right] \cdot \cos \text{А}\Phi + k_0, \qquad (14)$$

$$\tau_{\rho z} = \left[\frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos \text{А}\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos \text{А}\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \sin \text{А}\Phi . \qquad (15)$$

Из уравнения Лапласа, с учетом граничных и очевидных условий в зоне деформирования, определим функции θ и $\mathrm{A\Phi}$, которые связаны соотношениями Коши-Римана:

$$\mathrm{A\Phi} = \mathrm{AA}_1 z + \mathrm{AA}_6 \cdot \rho \cdot z = -\mathrm{AA}_6 \cdot z \cdot (\rho - r_n);$$

$$\theta = \mathrm{AA}_6 \cdot \frac{\rho^2}{2} - \mathrm{AA}_6 \cdot r_n \cdot \rho \cdot - \mathrm{AA}_6 \cdot \frac{z^2}{2},$$

где r_n – радиус, который определяет положение нейтрального сечения.

С целью анализа выражений (13), (14) и (15) были проведены расчеты напряжения на контакте. Построены графики распределения напряжений на контакте, рис. 2–5. Из которых видно, что подпор существенным образом влияет на напряженное состояние толстостенной трубы при осадке. С увеличением коэффициента подпора ξ_0, ξ_1 возрастает величина напряжения и характер распределения по длине ячейки деформации.

Используя выражение (13), можно определить усилие, которое оказывает металл при действии на боковую поверхность контейнера со стороны внешней и внутренней части трубы.

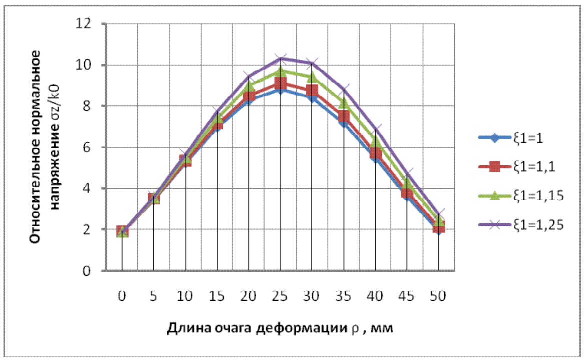

Рис. 2. Распределение относительного нормального напряжения при факторе формы S/h =5; коэффициенте трения f = 0,5; $\xi_1 = 11{,}25$; $\xi_0 = 1$

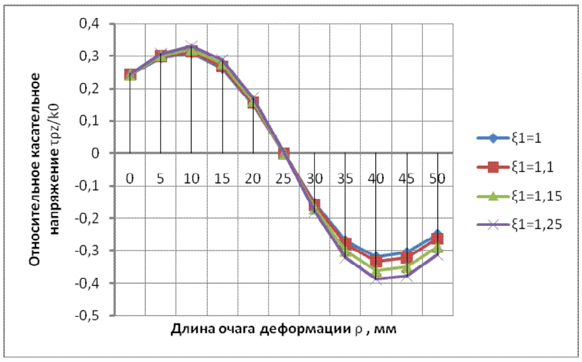

Рис. 3. Распределение относительного касательного напряжения при факторе формы S/h =5; коэффициенте трения f = 0,5; $\xi_1 = 11{,}25$; $\xi_0 = 1$

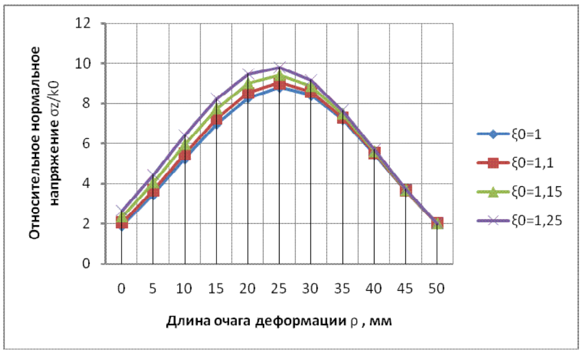

Рис. 4. Распределение относительного нормального напряжения при факторе формы S/h = 5; коэффициенте трения f = 0,5; $\xi_1 = 1$; $\xi_0 = 11{,}25$

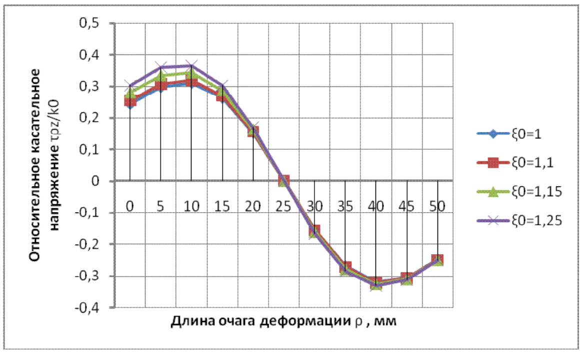

Рис. 5. Распределение относительного касательного напряжения при факторе формы S/h = 5; коэффициенте трения f =0 ,5; $\xi_1 = 1$; $\xi_0 = 11{,}25$

(S – толщина осаживаемой трубы).

Запишем граничные условия:
наружная поверхность (рис. 1)

при $\rho = R$; $\sigma_\rho = \sigma_1$; $f(z) = 0$; $\xi_1 = 1$.

При этом выражение (11):

$$\sigma_1 = -\frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \exp\left[\frac{1}{2} AA_6 \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\right] \times$$
$$\times \cos AA_6 \cdot z(R - r_n), \qquad (16)$$

где $AA_6 = 2\dfrac{A\Phi_0}{h(r_n - r)}$; $A\Phi_0 = arctg \cdot f(1-f)$;

внутренняя поверхность:

при $\rho = r$; $z = \dfrac{h}{2}$; $\sigma_\rho = \sigma_0$; $A\Phi = A\Phi_0$; $\theta = \theta_0$; $f(z) = 0$; $\xi_0 = 1$, тогда:

$$\sigma_0 = \frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \exp\left[AA_6 \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\right] \cos AA_6 \cdot z(r - r_n). \qquad (17)$$

Для расчета по формулам (16) и (17) необходимо знать постоянную AA_6 и значение нейтрального радиуса $r_н$. Воспользуемся граничными условиями на наружной и внутренней боковых поверхностях для касательных напряжений.

Запишем граничные условия:

наружная поверхность:

при $\rho = R$; $z = \frac{h}{2}$; $A\Phi = A\Phi_1$; $\theta = \theta_1$; $\tau_{\rho z} = k_1 \cdot \psi_1$.

Подставим граничные условия в выражение (15):

$$k_1 \cdot \psi_1 = \frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \left(R^2 - r^2\right)}{R\left(R^2 - r^2\right)\cos A\Phi_1} \sin A\Phi_1 .$$

После сокращений и упрощений имеем:

$$\psi_1 = \xi_1 tgA\Phi_1 \text{ или } \frac{\psi_1}{\xi_1} = tgA\Phi_1 ; \; A\Phi_1 = arctg\frac{\psi_1}{\xi_1} ,$$

где $\psi_1 = f(1-f)$;

внутренняя поверхность:

при $\rho = r$; $z = \frac{h}{2}$; $A\Phi = A\Phi_0$; $\theta = \theta_0$; $\tau_{\rho z} = k_0 \cdot \psi_0$.

Подставим граничные условия в выражение (15):

$$k_0 \cdot \psi_0 = -\frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \left(r^2 - R^2\right)}{r\left(R^2 - r^2\right)\cos A\Phi_0} \sin A\Phi_0 .$$

После сокращений и упрощений имеем:

$$\psi_0 = \xi_0 tgA\Phi_0 \text{ или } \frac{\psi_0}{\xi_0} = tgA\Phi_0 ; \; A\Phi_0 = arctg\frac{\psi_0}{\xi_0} .$$

Подставляя граничные условия на внешних и внутренних поверхностях с использованием выражения АФ, получим:

$$A\Phi_1 = -AA_6 \cdot \frac{h}{2}\left(R - r_n\right); \; -A\Phi_0 = -AA_6 \cdot \frac{h}{2}\left(r - r_n\right).$$

Разделим одно на другое: $-\frac{A\Phi_1}{A\Phi_0} = \frac{R - r_n}{r - r_n}$.

Определяем величину нейтрального радиуса r_n:

$$r_n = \frac{A\Phi_0 \cdot R + A\Phi_1 \cdot r}{A\Phi_1 + A\Phi_0} . \tag{18}$$

Принимая: $A\Phi_0 \approx \frac{\psi_0}{\xi_0}$; $A\Phi_1 \approx \frac{\psi_1}{\xi_1}$,

и подставляя в (18), окончательно получим:

$$r_n = \frac{\psi_0 \cdot \xi_1 \cdot R + \psi_1 \cdot \xi_0 \cdot r}{\psi_1 \cdot \xi_0 + \psi_0 \cdot \xi_1} . \tag{19}$$

При $\psi_0 = \psi_1$, (19) имеет вид:

$$r_n = \frac{\xi_1 \cdot R + \xi_0 \cdot r}{\xi_0 + \xi_1} . \tag{20}$$

При $\xi_0 = \xi_1$: $r_n = \frac{R + r}{2}$. (21)

В работах [1, 2] r_n принимался в соответствии с (21).

Из соотношений (19)(21) видно, что нейтральный радиус r_n определяется не только значениями наружного и внутреннего радиусов, но и величиной подпора ξ_1 и ξ_0 и условиями контактного трения на наружной и внутренней поверхностях ψ_1 и ψ_0. На рис. 6, 7 показано распределение радиальных напряжений по высоте заготовки в зависимости от коэффициента трения f и фактора формы S/h.

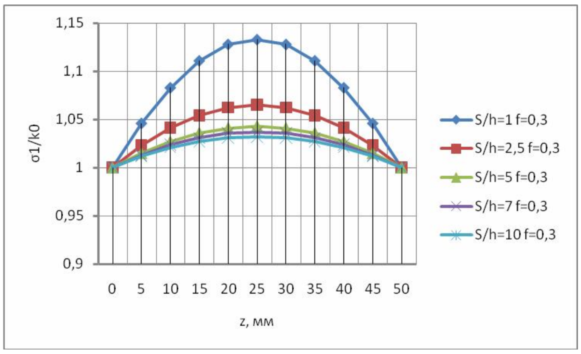

Рис. 6. Распределение контактных радиальных напряжений на наружной боковой поверхности при осадке толстостенной трубы, коэффициент трения f = 0,3, фактор формы 1...10

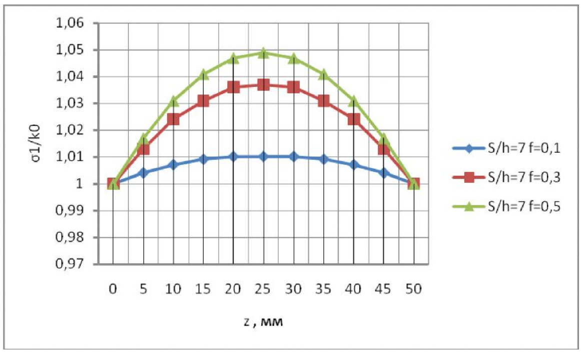

Рис. 7. Распределение контактных радиальных напряжений на наружной боковой поверхности при осадке толстостенной трубы, коэффициент трения f = 0,1...0,5, фактор формы 7

Напряжение подпора σ_1 на внешней поверхности показывает, что они зависят от коэффициента трения (увеличивается с увеличением f) и параметра S/h. Интерес представляет последний случай, т. к. с увеличением фактора формы величина σ_1 уменьшается.

Выводы

1. Поставлена и решена осесимметричная плоская задача теории пластичности в напряжениях.
2. Рассмотрена осевая осадка толстостенной трубы в условиях внешнего и внутреннего радиального подпора.
3. Получены аналитические зависимости для определения наружного радиального подпора. Построены графики.

Список литературы

1. Плоская задача теории пластичности в цилиндрических координатах / [В. В. Чигиринский, О. М. Силенко, С. А. Силенко, А. Ю. Матюхин] // Прогрессивные технологии пластической деформации. – М. : МИСиС, 2009. – С. 345–351.
2. Чигиринський В. В. Розробка математичної моделі радіального тиску пластичного середовища при осадці полих тіл обертання / В. В. Чигиринський, А. Ю. Матюхін, В. В. Падалка // Вісник національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – 2011. – С. 46–50.
3. Чигиринский В. В. Решение осесимметричной плоской задачи теории пластичности в напряжениях / В. В. Чигиринский, С. А. Силенко, А. Ю. Матюхин // Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении. – 2010. – № 1. – С. 121–125.
4. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / Сторожев М. В., Попов Э. А. – М. : Машиностроение, 1977. – 422 с.
5. Соколовский В. В. Теория пластичности / Соколовский В. В. – М. : Высшая школа, 1962. – 608 с.
6. Громов Н. П. Теория обработки металлов давлением / Громов Н. П. –М. : Металлургия, 1978.– 359 с.
7. Смирнов В. С. Теория прокатки / Смирнов В.С. – М. : Металлургия, 1967. – 460 с.
8. Тарновский И. Я. Течение металла при осадке толстостенных цилиндров / Тарновский И. Я., Поздеев А. А. // Сб.трудов Уральского политехн. ин-та. – 1958. – № 64. – С. 104–112.
9. Тарновский И. Я. Теория обработки металлов давлением / Тарновский И. Я., Поздеев А. А., Ганаго О. А. –М. : Металлургиздат, 1963. – 1963. – 673 с.

Поступила в редакцию 31.08.2011

Чигиринський В.В., Матюхін А.Ю. Дослідження напруженого стану при осаді тіл обертання в умовах зовнішнього радіального навантаження

Отримано узагальнене рівняння рівноваги для осесиметричної задачі в циліндричних координатах, рішення якого в аналітичному вигляді дозволяє визначити функцію дотичних напружень від координат вогнища деформації. Визначено складові тензора напруг для плоскої осесиметричної задачі. Дослідження напруженого стану товстостінної труби при торцевому осаджуванні з урахуванням радіального зовнішнього та внутрішнього підпору. Показано вплив радіального підпору на розподіл нормальних та дотичних напружень.

Ключові слова: *напруга, деформація, пластичність, міцність, радіальне навантаження.*

Chygyryns'kiy V., Matyuhin A. Research of the stress state of upsetting of rotation in the conditions of external radial loading

The generalized equalization of equilibrium is got for an axis of symmetry task in cylindrical co-ordinates, the decision of which in an analytical kind allows to define the function of tangent tensions from the co-ordinates of hearth of deformation. The constituents of tensor of tensions are certain for a flat axis of symmetry task. Research of the tense state of the thick-walled pipe at the butt end sinking taking into account radial external and internal head. Influence of radial head is shown on distributing of normal and tangent tensions.

Key words: *stress, deformation, plasticity, strength, radial loading.*