

УДК 533.9.07

Ш. Рошанпур

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ИНДУКЦИОННЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ИСТОЧНИКАХ ПЛАЗМЫ И ЭЛЕКТРОНОВ

В приближении однокомпонентной магнитной гидродинамики представлена математическая модель электромагнитного поля в индукционных высокочастотных источниках плазмы и электронов. Уравнения записаны в двумерной форме в представлении об аксиальной симметрии задачи. Перенос импульса описан уравнением вязкости, в котором учтено влияние магнитного поля на диссипативные процессы в разреженной среде. Представлены уравнения для магнитного поля и тока в плазменном объеме и в цепи индуктора. Показана возможность в разреженной среде существования тока в области с размерами, заметно большими, чем глубина магнитного скин-слоя.

Ключевые слова: ВЧ-ионизация, источник плазмы, источник электронов.

Введение

Работа индукционных высокочастотных источников заряженных частиц — электронов, плазмы — основана, в первую очередь, на ионизации газа в высокочастотном разряде. Магнитное поле индуктора, созданное источником периодического напряжения, индуцирует в объеме периодическое азимутальное электрическое поле, возбуждающее азимутальный ток.

В статье представлена модель математическая модель магнитного поля в ВЧ-источнике, дополняющая уравнения динамики заряженных частиц, представленных в работе [1].

1. Магнитное поле в плазменном объеме

Как показано в [1], магнитное поле практически не препятствует осевому и радиальному движению электронов. В связи с этим существенные изменения параметров, связанные с индуцированным электронным током, имеют место только в радиальном направлении, что позволяет усреднить характеристики по длине полости.

Подсистема уравнений высокочастотного разряда включает:

- уравнения, описывающие влияние поля на характеристики азимутального движения электронов:

- азимутальная проекция уравнения движения электронов:

$$m_e n_e \frac{\partial V_{e\psi}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\pi_e^{(r\psi)} r^2) + e n_e E_\psi \approx -v_e^{(p\Sigma)} m_e n_e V_{e\psi}; \quad (1)$$

- радиально-азимутальная компонента уравнения вязкости электронов:

$$\frac{\partial \pi_e^{(r\psi)}}{\partial t} + n_e k T_e r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_{e\psi}}{r} \right) \approx -v_e^{(\pi)} \pi_e^{(r\psi)}, \quad (2)$$

где

$$v_e^{(p\Sigma)} = v_e^{(p)} + \frac{n_{es}}{n_e} \frac{v_e n_e^{(p)}}{2L}, \quad (3)$$

и n_{es}/n_e — отношение концентрации на осевых границах к среднему вдоль оси значению концентрации;

- уравнения, описывающие характеристики электромагнитного поля и влияние на них азимутального тока электронов:

- связь между векторным потенциалом и магнитной индукцией:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \rightarrow B = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (A r); \quad (4)$$

- связь между векторным потенциалом и напряженностью электрического поля:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow E_\psi = -\frac{\partial A}{\partial t}; \quad (5)$$

- уравнение ротора магнитного поля:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \rightarrow \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{e n_e V_{e\psi}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (6)$$

С учетом (5) выражение (1) можно переписать так:

$$m_e n_e \frac{\partial V_{e\psi}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\pi_e^{(r\psi)} r^2 \right) - e n_e \frac{\partial A}{\partial t} \approx -v_e^{(p\Sigma)} m_e n_e V_{e\psi}. \quad (7)$$

В таком случае уравнения (2), (6), (7) образуют замкнутую систему и могут решаться независимо. В условиях осевой симметрии при $r \rightarrow 0$ имеет место:

$$A \sim r, V_{e\psi} \sim r, \pi_e^{(r\psi)} \sim r^2. \quad (8)$$

С учетом (8) систему (2) – (7) удобнее решать в переменных $\frac{R}{r} V_{e\psi}$, $\frac{R^2}{r^2} \pi_e^{(r\psi)}$, $\frac{R}{r} A$.

В соответствии с оценками, приведенными в работе [1], существенными функциями времени являются величины A , B , E_ψ , $V_{e\psi}$, $\pi_e^{(r\psi)}$, относительно которых система (2), (6), (7) является линейной. В таком случае при гармоническом изменении во времени напряжения источника питания индуктора решения для перечисленных дисциплин также будут гармонические. Представим переменные во времени параметры в (2), (6), (7) так:

$$\frac{B(t, r)}{B_0} = b_c(\rho) \cos \omega t + b_s(\rho) \sin \omega t, \quad (9)$$

$$\frac{A(t, r)}{B_0 R} = \left(a_c(\rho) \cos \omega t + a_s(\rho) \sin \omega t \right) \rho, \quad (10)$$

$$\frac{m_e V_{e\psi}(t, r)}{e B_0 R} = \left(v_c(\rho) \cos \omega t + v_s(\rho) \sin \omega t \right) \rho, \quad (11)$$

$$\frac{\pi_e^{(r\psi)}(t, r)}{e n_e B_0 \omega R^2} = \left(P_c(\rho) \cos \omega t + P_s(\rho) \sin \omega t \right) \rho^2, \quad (12)$$

где $n_{e\bullet}$ – концентрация электронов на оси полости;
 ρ – безразмерный радиус:

$$r = R \rho. \quad (13)$$

В таком случае из (2), (6), (7) следует:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d v_c}{d \rho} \approx - \frac{m_e \omega^2 R^2}{k T_e} \frac{n_{e\bullet}}{n_e} \left(\frac{v_e^{(\pi)}}{\omega} P_c + P_s \right), \quad (14)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d v_s}{d \rho} \approx - \frac{m_e \omega^2 R^2}{k T_e} \frac{n_{e\bullet}}{n_e} \left(\frac{v_e^{(\pi)}}{\omega} P_s - P_c \right), \quad (15)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d b_c}{d \rho} = \frac{e^2 n_{e\bullet} R^2}{\epsilon_0 c^2 m_e} \frac{n_e}{n_{e\bullet}} v_c, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d b_s}{d \rho} = \frac{e^2 n_{e\bullet} R^2}{\epsilon_0 c^2 m_e} \frac{n_e}{n_{e\bullet}} v_s, \quad (17)$$

$$\rho \frac{d a_c}{d \rho} + 2 a_c = b_c, \quad (18)$$

$$\rho \frac{d a_s}{d \rho} + 2 a_s = b_s, \quad (19)$$

$$\rho \frac{\partial P_c}{\partial \rho} + 4 P_c \approx - \frac{n_e}{n_{e\bullet}} \left(\frac{v_e^{(p\Sigma)}}{\omega} v_c - a_s + v_s \right), \quad (20)$$

$$\rho \frac{\partial P_s}{\partial \rho} + 4 P_s \approx - \frac{n_e}{n_{e\bullet}} \left(\frac{v_e^{(p\Sigma)}}{\omega} v_s + a_c - v_c \right). \quad (21)$$

При использовании метода конечных элементов имеем следующие выражения для первой производной произвольной величины Z по безразмерному радиусу ρ в узле с номером i :

$$\frac{dZ}{d\rho} = \frac{Z^{(i+1)} - Z^{(i-1)}}{2\Delta\rho}. \quad (22)$$

В таком случае из (14), (22) имеем:

$$\frac{v_c^{(i+1)} - v_c^{(i-1)}}{2i\Delta\rho^2} \approx - \frac{m_e \omega^2 R^2}{k T_e} \frac{n_{e\bullet}}{n_e} \left(\frac{v_e^{(\pi)}}{\omega} P_c^{(i)} + P_s^{(i)} \right), \quad (23)$$

$$\frac{v_s^{(i+1)} - v_s^{(i-1)}}{2i\Delta\rho^2} \approx - \frac{m_e \omega^2 R^2}{k T_e} \frac{n_{e\bullet}}{n_e} \left(\frac{v_e^{(\pi)}}{\omega} P_s^{(i)} - P_c^{(i)} \right), \quad (24)$$

$$\frac{b_c^{(i+1)} - b_c^{(i-1)}}{2i\Delta\rho^2} = \frac{e^2 n_{e\bullet} R^2}{\varepsilon_0 c^2 m_e} \frac{n_e}{n_{e\bullet}} v_c^{(i)}. \quad (25)$$

$$\frac{b_s^{(i+1)} - b_s^{(i-1)}}{2i\Delta\rho^2} = \frac{e^2 n_{e\bullet} R^2}{\varepsilon_0 c^2 m_e} \frac{n_e}{n_{e\bullet}} v_s^{(i)}. \quad (26)$$

$$i \frac{a_c^{(i+1)} - a_c^{(i-1)}}{2} = b_c^{(i)} - 2a_c^{(i)}, \quad (27)$$

$$i \frac{a_s^{(i+1)} - a_s^{(i-1)}}{2} = b_s^{(i)} - 2a_s^{(i)}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & i \frac{P_c^{(i+1)} - P_c^{(i-1)}}{2} \approx \\ & \approx -\frac{n_e}{n_{e\bullet}} \left(\frac{v_e^{(p\Sigma)}}{\omega} v_c^{(i)} - a_s^{(i)} + v_s^{(i)} \right) - 4P_c^{(i)}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & i \frac{P_s^{(i+1)} - P_s^{(i-1)}}{2} \approx \\ & \approx -\frac{n_e}{n_{e\bullet}} \left(\frac{v_e^{(p\Sigma)}}{\omega} v_s^{(i)} + a_c^{(i)} - v_c^{(i)} \right) - 4P_s^{(i)}. \quad (30) \end{aligned}$$

Можно заметить, что уравнения (23) – (30) имеют особенность при $i=0$. Особенность оказывается устранимой, если для всех параметров названных уравнений

$$Z^{(-1)} = Z^{(1)}, \quad (31)$$

то есть первая производная любого параметра на оси равна нулю, что и характерно для осевой симметрии.

В уравнениях (27) – (30) для $i=0$ имеем:

$$a_c^{(0)} = \frac{b_c^{(0)}}{2}, \quad (32)$$

$$a_s^{(0)} = \frac{b_s^{(0)}}{2}, \quad (33)$$

$$4P_c^{(0)} \approx -\left(\frac{v_e^{(p\Sigma)}}{\omega} v_c^{(0)} - a_s^{(0)} + v_s^{(0)} \right), \quad (34)$$

$$4P_s^{(0)} \approx -\left(\frac{v_e^{(p\Sigma)}}{\omega} v_s^{(0)} + a_c^{(0)} - v_c^{(0)} \right). \quad (35)$$

Для отыскания значений искомым параметров в точке $i=1$ можно воспользоваться выражениями для поведения величин в интервале $i=0 - 1$:

$$Z = Z^{(0)} + (Z^{(1)} - Z^{(0)}) \frac{r^2}{\Delta r^2}. \quad (36)$$

В таком случае:

$$2 \frac{v_c^{(1)} - v_c^{(0)}}{\Delta\rho^2} \approx -\frac{m_e \omega^2 R^2}{k T_e} \left(\frac{v_e^{(\pi)}}{\omega} P_c^{(0)} + P_s^{(0)} \right), \quad (37)$$

$$2 \frac{v_s^{(1)} - v_s^{(0)}}{\Delta\rho^2} \approx -\frac{m_e \omega^2 R^2}{k T_e} \left(\frac{v_e^{(\pi)}}{\omega} P_s^{(0)} - P_c^{(0)} \right), \quad (38)$$

$$2 \frac{b_c^{(1)} - b_c^{(0)}}{\Delta\rho^2} = \frac{e^2 n_{e\bullet} R^2}{\varepsilon_0 c^2 m_e} v_c^{(0)}, \quad (39)$$

$$2 \frac{b_s^{(1)} - b_s^{(0)}}{\Delta\rho^2} = \frac{e^2 n_{e\bullet} R^2}{\varepsilon_0 c^2 m_e} v_s^{(0)}, \quad (40)$$

$$4(a_c^{(1)} - a_c^{(0)}) = b_c^{(1)} - 2a_c^{(0)}, \quad (41)$$

$$4(a_s^{(1)} - a_s^{(0)}) = b_s^{(1)} - 2a_s^{(0)}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & 6(P_c^{(1)} - P_c^{(0)}) \approx \\ & \approx -\left(\frac{v_e^{(p\Sigma)}}{\omega} v_c^{(1)} - a_s^{(1)} + v_s^{(1)} \right) - 4P_c^{(0)}, \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 6(P_s^{(1)} - P_s^{(0)}) \approx \\ & \approx -\left(\frac{v_e^{(p\Sigma)}}{\omega} v_s^{(1)} + a_c^{(1)} - v_c^{(1)} \right) - 4P_s^{(0)}. \quad (44) \end{aligned}$$

Из (32) – (35) следует, что значения величин $a_c^{(0)}$, $a_s^{(0)}$, $P_c^{(0)}$ и $P_s^{(0)}$ (на оси) не являются произвольными, и для решения системы требуется задавать значения четырех величин

$$b_c^{(0)}, b_s^{(0)}, v_c^{(0)} \text{ и } v_s^{(0)}. \quad (45)$$

Ввиду линейности системы распределение любого параметра по радиусу может быть представлено в виде суммы четырех линейно независимых решений. Вариация значений величин $b_c^{(0)}$,

$b_s^{(0)}$, $v_c^{(0)}$ и $v_s^{(0)}$ при этом должна обеспечить выполнение граничных условий:

- значения вязкости при $r = R$:

$$P_{c,s}^{(I)} = \frac{n_e(R) v_e \eta_e^{(p)}}{n_{e\bullet} 4 \omega R} v_{c,s}^{(I)}. \quad (46)$$

- зависимости всех масштабных характеристик ВЧ разряда от характеристик источника питания индуктора – например, действующего значения мощности.

Можно заметить, что количество варьируемых параметров (45) на единицу превосходит количество граничных условий при $r = R$. Однако, с учетом (9) – (12) можно заметить, что при со-

хранении комплекса $\sqrt{b_c^{(0)2} + b_s^{(0)2}}$ вариация от-

ношения $b_s^{(0)} / b_c^{(0)}$ означала бы просто смещение фазы колебаний всех искомым переменных во времени на равную величину (изменение «начала отсчета» времени), что не является существенным в нашей задаче. Ввиду этого отношение $b_s^{(0)} / b_c^{(0)}$ можно задавать произвольно, на-

пример – $b_s^{(0)} / b_c^{(0)} = 0$.

В таком случае решение для любой искомой величины Z может быть представлено в виде суммы:

$$Z^{(i)} = Z_0^{(i)} + C_1 Z_1^{(i)} + C_2 Z_2^{(i)} \quad (47)$$

при следующих значениях величин (45) в каждом парциальном решении:

$$b_{c,k}^{(0)} = \delta_{k0}, \quad b_s^{(0)} = 0, \quad v_c^{(0)} = \delta_{k1}, \quad v_s^{(0)} = \delta_{k2}. \quad (48)$$

2. Закон Ома цепи индуктора

Уравнение ротора магнитного поля (6) в квазиодномерном описании имеет вид:

$$\frac{dB}{dr} = -\frac{j_{\text{eff}}}{\epsilon_0 c^2}, \quad (49)$$

где j_{eff} – среднее по слою с толщиной, равной диаметру провода индуктора, значение плотности тока:

$$j_{\text{eff}} = \frac{In}{2r_c L}, \quad (50)$$

где n – количество витков индуктора;

L – длина полости;

I – ток в контуре индуктора;

r_c – радиус провода кондуктора.

Обозначим значения на радиальной поверхности полости катода так:

$$B_R = B(R), \quad (51)$$

$$A_R = A(R). \quad (52)$$

В квазиодномерном описании магнитная индукция вне индуктора равна нулю:

$$B(R + 2r_c) = 0. \quad (53)$$

Решением уравнения (49) с учетом (50), (51) является выражение:

$$B = \frac{In}{\epsilon_0 c^2 L} \left(1 - \frac{r-R}{2r_c} \right). \quad (54)$$

Тогда, для векторного потенциала имеем (4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(Ar) &= \\ &= \frac{In}{\epsilon_0 c^2 L} \left(R - \left(\frac{R}{2r_c} - 1 \right) (r-R) - \frac{(r-R)^2}{2r_c} \right), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} Ar &= A_R R + \frac{In}{\epsilon_0 c^2 L} \left(R(r-R) - \right. \\ &\left. - \left(\frac{R}{2r_c} - 1 \right) \frac{(r-R)^2}{2} - \frac{(r-R)^3}{6r_c} \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Закон Ома в дифференциальной форме для провода кондуктора имеет вид:

$$j = \sigma E = -\sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{\partial A}{\partial t} \right), \quad (57)$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \frac{jr}{\sigma} + r \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (58)$$

где σ – удельная проводимость провода.

Интегрирование по длине и диаметру провода индуктора приводит к выражению:

$$U = -n \frac{1}{2r_c} \int_0^{2r_c} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} d\psi dr \quad (59)$$

или

$$U = IR + 2\pi n \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2r_c} \int_R^{R+2r_c} Ar dr, \quad (60)$$

где R – сопротивление контура индуктора;
 I – ток в контуре индуктора;
 U – напряжение в контуре индуктора.

Таким образом, закон Ома для контура индуктора имеет вид:

$$U = IR + 2\pi nR \frac{\partial}{\partial t} \left(A_R + B_R r_c \left(\frac{2}{3} + \frac{r_c}{6R} \right) \right) \quad (61)$$

или, с учетом (50):

$$U = \frac{\varepsilon_0 c^2}{n} R B_R L + 2\pi nR \left[\frac{\partial A_R}{\partial t} + \frac{\partial B_R}{\partial t} r_c \left(\frac{2}{3} + \frac{r_c}{6R} \right) \right]. \quad (62)$$

С учетом (9), (10) имеем:

$$B_R = B_0 (b_c(1) \cos \omega t + b_s(1) \sin \omega t), \quad (63)$$

$$A_R = B_0 R (a_c(1) \cos \omega t + a_s(1) \sin \omega t). \quad (64)$$

В аналогичном представлении для тока и напряжения в цепи индуктора можем записать:

$$I = I_c \cos \omega t + I_s \sin \omega t, \quad (65)$$

$$U = U_c \cos \omega t + U_s \sin \omega t. \quad (66)$$

При этом, с учетом (54) имеем:

$$I_{c,s} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{n} L B_0 b_{c,s}(1). \quad (67)$$

Из (62) – (64), (66) следует:

$$U_c = B_0 \left[\frac{\varepsilon_0 c^2}{n} R L b_c(1) + 2\pi n \omega R^2 \left(a_s(1) + r_c \left(\frac{2}{3} + \frac{r_c}{6R} \right) b_s(1) \right) \right]. \quad (68)$$

$$U_s = B_0 \left[\frac{\varepsilon_0 c^2}{n} R L b_s(1) - 2\pi n \omega R^2 \left(a_c(1) + r_c \left(\frac{2}{3} + \frac{r_c}{6R} \right) b_c(1) \right) \right]. \quad (69)$$

С учетом (67) имеем для амплитудных значений тока и напряжения в цепи индуктора:

$$I_{amp} = \sqrt{I_c^2 + I_s^2} = \frac{\varepsilon_0 c^2 L B_0}{n} \sqrt{b_c^2(1) + b_s^2(1)}, \quad (70)$$

$$U_{amp} = \sqrt{U_c^2 + U_s^2} = B_0 \left[\left(\frac{\varepsilon_0 c^2}{n} R L \right)^2 (b_c^2(1) + b_s^2(1)) + (2\pi n \omega R^2)^2 \left(\left(a_s(1) + r_c \left(\frac{2}{3} + \frac{r_c}{6R} \right) b_s(1) \right)^2 + \left(a_c(1) + r_c \left(\frac{2}{3} + \frac{r_c}{6R} \right) b_c(1) \right)^2 \right) + 4\pi \varepsilon_0 R L \omega R^2 \left(a_s(1) b_c(1) - a_c(1) b_s(1) \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (71)$$

Актуальная мощность в цепи индуктора в соответствии с (65), (66) равна:

$$W = IU = \frac{1}{2} \left(I_c U_c + I_s U_s + (I_c U_c - I_s U_s) \cos 2\omega t + (I_c U_s + I_s U_c) \sin 2\omega t \right). \quad (72)$$

Для экстремальных и среднего за период значений мощности источника питания индуктора имеем в таком случае:

$$W_{max} = \frac{1}{2} \left(I_c U_c + I_s U_s + \sqrt{I_c^2 U_c^2 + I_c^2 U_s^2 + I_s^2 U_c^2 + I_s^2 U_s^2} \right), \quad (73)$$

$$W_{min} = \frac{1}{2} \left(I_c U_c + I_s U_s - \sqrt{I_c^2 U_c^2 + I_c^2 U_s^2 + I_s^2 U_c^2 + I_s^2 U_s^2} \right), \quad (74)$$

$$\tilde{W} = \frac{I_c U_c + I_s U_s}{2} = \frac{B_0^2}{2} \left(\frac{\varepsilon_0 c^2 L}{n} \right)^2 R (b_c^2(1) + b_s^2(1)) + \pi \varepsilon_0 c^2 \omega B_0^2 R^2 L (a_s(1) b_c(1) - a_c(1) b_s(1)). \quad (75)$$

Выводы

Представленная модель может быть использована для расчета характеристик высокочастотной ионизации в разреженных средах, где в отличие от плотных сред вязкий перенос импульса электронов может приводить к существованию тока далеко за пределами магнитного скин-слоя.

Литература

1. Математическое моделирование процессов в индукционных высокочастотных источниках плазмы и электронов [Текст] / А.В. Лоян, С.Ю. Нестеренко, Ш. Рошанпур, А.И. Цаглов // Авиационно-космическая техника и технология. - 2011. - Вып. 10 (81). — С. 203-206.

Поступила в редакцию 12.05.2012

Ш. Рошанпур. Математична модель електромагнітного поля в індукційних високочастотних джерелах плазми і електронів

У наближенні однокомпонентної магнітної гідродинаміки наведено математичну модель електромагнітного поля в індукційних високочастотних джерелах плазми і електронів. Рівняння моделі записано у двовимірній формі в представленні про аксіальну симетрію задачі. Переніс імпульсу описано рівнянням в'язкості, у якому враховано вплив магнітного поля на дисипативні процеси у розрідженому середовищі. Наведено рівняння для магнітного поля і струму в області плазми та у ланцюгу індуктора. Показано можливість у розрідженому середовищі існування струму в області із розмірами помітно більшими за глибину магнітного скин-шару.

Ключові слова: ВЧ-іонізація, джерело плазми, джерело електронів.

Sh. Roshanpur. Mathematical modelling of electromagnetic field in inductive high frequency sources of plasma and electrons

Mathematical model of electromagnetic field in inductive high frequency sources of plasma and electrons is represented in single component magnetic hydrodynamics approximation. Equations are written in two-dimension form in the supposition about axial symmetry of task. Motion transition is described by viscosity equation considering magnetic field influence on dissipative processes in rarified substance. The equations for magnetic field inside plasma and in the inductor circuit are represented. The possibility is shown for rarified substance of the current existence in the volume of sizes significantly larger than magnetic skin-shield depth.

Key words: high frequency ionization, plasma sources, electrons sources.