

УДК 539.37

Канд. техн. наук Д. И. Анпилогов

Запорожский национальный технический университет

## ОЦЕНКА СДВИГОВОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИВОДНОЙ ШЕСТЕРНИ АВИАЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Построено аналитическое решение задачи теории упругости для двухсвязной области, моделирующей приводную шестерню авиационного двигателя. Оценены взаимные смещения точек на границах области. Установлено, что эти смещения достаточны для использования индукционных датчиков.

**Ключевые слова:** плоская задача теории упругости, граничные условия, комплексные потенциалы, крутящий момент, сдвиговая деформация, датчик положения.

### Введение

Актуальность контроля и диагностики технического состояния авиационных двигателей в режиме реального времени несомненна, особенно для самолетов маневренной авиации [1]. Отслеживание текущих значений такого интегрального параметра, как тяга двигателя, помогает ориентироваться при ручном управлении. Кроме того, организация обратной связи позволит стабилизировать режим работы двигателя. В качестве сенсоров используются различные датчики, например СВЧ [2], пирометрические [3] и др. Очевидно, основным требованиям (бесконтактность, термостойкость, высокая чувствительность к линейным и угловым перемещениям, простота, надежность) удовлетворяют индуктивные датчики, позволяющие отслеживать перемещения в десятки микрон и менее [4].

При приложении крутящего момента приводная шестерня двигателя деформируется. Изменение взаимного положения меток на контурах шестерни сигнализирует о величине момента. Целью работы является оценка этой деформации на предмет ее сопоставления с чувствительностью индукционных датчиков.

### Методика исследований

Ограничимся постановкой и решением плоской граничной задачи теории упругости в физически линейной постановке. Область задачи является двухсвязной и ограничена концентрическими окружностями радиусов  $R_1$ ,  $R_2$ . Приложение внешних моментов моделируется приложением тангенциальных усилий, равномерно распределенных вдоль внутреннего и внешнего контуров. На рис. 1 указаны направления этих усилий, при которых возможно равенство нулю суммарного внешнего момента.

Граничная задача решается методом комплексных потенциалов Мухелишвили [5]. Сформули-

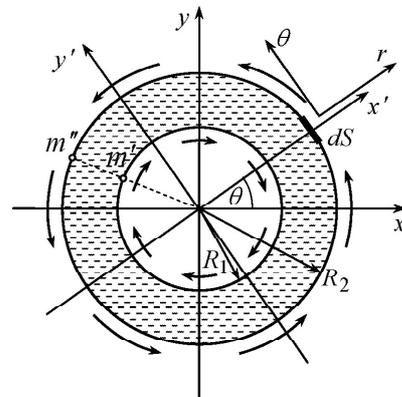


Рис. 1. Геометрия области и внешние усилия

руем граничные условия. Введем локальную систему координат  $r\theta$  (см. рис. 1). Пусть  $dS$  — площадка на контуре, нормальная к направлению  $r$ . Через  $h$  обозначим физическую толщину области. Тогда  $dS = h \times R d\theta$ ,  $d\theta$  — угол, под которым площадка  $dS$  видна из центра;  $R = R_1$  и  $R = R_2$  для внутреннего и внешнего контуров соответственно. Через  $\bar{r}\theta$  обозначим касательное напряжение, действующее на площадку  $dS$  (проекция на ось  $\theta$  напряжения, действующего на площадку, нормальную к  $r$  [5, с. 133]). Тогда элемент силы  $dF = \bar{r}\theta \cdot dS = \bar{r}\theta \times hR d\theta$ , элемент внешнего момента  $dM = R dF = \bar{r}\theta \times hR^2 d\theta$ . Интегрируя по углам  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , получаем внешний момент  $M = 2\pi R^2 h \bar{r}\theta$ . Через  $M_0 = M/h$  обозначим внешний момент в расчете на единицу длины, отмеряемой вдоль направления  $h$ . Тогда

$$M_0 = 2\pi R^2 \bar{r}\theta. \quad (1)$$

На внутренний и внешний контуры области должны действовать разные напряжения, обеспечивающие одинаковый момент:

$M_0 = 2\pi R_1^2 \overline{r\theta}' = 2\pi R_2^2 \overline{r\theta}''$ . Здесь один штрих означает принадлежность к внутреннему контуру, а два штриха — к внешнему. Тогда следует положить:

$$\overline{r\theta}' = \frac{M_0}{2\pi R_1^2} = iA_0', \quad \overline{r\theta}'' = \frac{M_0}{2\pi R_2^2} = iA_0''.$$

Пусть внешняя нагрузка распределена по контуру равномерно. Тогда коэффициенты  $A_0'$ ,  $A_0''$  являются свободными членами рядов Фурье функции  $\overline{r\theta}$  по углу  $\theta$  на внутреннем и внешнем контурах соответственно. Остальные коэффициенты этих рядов равны нулю. Тогда граничные условия [5, § 59, (2)] принимают вид:

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - e^{2i\theta} \left( \overline{z} \Phi'(z) + \Psi(z) \right) = \begin{cases} A_0', & r = R_1 \\ A_0'', & r = R_2 \end{cases}.$$

Дальнейшее применение метода неопределенных коэффициентов согласно методике, изложенной в [5], приводит к результатам:

$$\Phi(z) \equiv 0, \quad \Psi(z) = i \frac{M_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{z^2}. \quad (2)$$

Этим самым решение граничной задачи построено.

### Результаты и их обсуждение

Интерпретация решения (2) состоит в получении поля перемещений согласно [5, § 32, (1)]. Для компонент  $u$ ,  $v$  перемещения внутренней точки  $z = x + iy$  области получаем:

$$u = \frac{M_0}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{r} \sin \theta, \quad v = -\frac{M_0}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{r} \cos \theta. \quad (3)$$

Здесь  $r = |z|$ ,  $\theta = \arg z$ ,  $\mu$  — модуль сдвига материала.

Проверим построенное решение. Дифференцируя (3), находим относительные деформации [5, § 14, (5)]:

$$e_{xx} = -\frac{2Axy}{r^4}, \quad e_{yy} = \frac{2Axy}{r^4}, \quad e_{xy} = A \frac{x^2 - y^2}{r^4}.$$

Здесь обозначено  $A = \frac{M_0}{4\pi\mu}$ . Тогда согласно закону Гука [5, § 19, (18)], напряжения

$$X_x = -\frac{E}{1+\sigma} \cdot \frac{2Axy}{r^4}, Y_y = \frac{E}{1+\sigma} \cdot \frac{2Axy}{r^4}, X_y = \frac{E}{1+\sigma} \cdot A \frac{x^2 - y^2}{r^4}.$$

Здесь через  $E$  обозначен модуль Юнга, через  $\sigma$  — коэффициент Пуассона;  $E = 2(1+\sigma)\mu$  [5, § 19, (15)]. Пересчет этих напряжений согласно [5, § 8, (7)] к осям  $x'$ ,  $y'$ , повернутым на угол  $\theta$  в положительном направлении приводит к результатам

$$X_{x'} = 0, \quad Y_{y'} = 0, \quad X_{y'} = \frac{M_0}{2\pi r^2}.$$

Первые два из этих соотношений подчеркивают сдвиговый характер деформации, а третье соответствует (1).

Используя [5, § 39, (2)], преобразуем поле перемещений (3) к повернутым осям  $r\theta$ :

$$v_r = 0, \quad v_\theta = -\frac{M_0}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{r}. \quad (4)$$

Первое из этих двух соотношений подчеркивает сдвиговый характер деформации. Независимость полученных компонент перемещения от угла  $\theta$  обусловлена цилиндрической симметрией задачи.

Тогда углы поворота точек  $m'$ ,  $m''$  на внутреннем и внешнем участках контура:

$$\theta' = \frac{v_\theta(R_1)}{R_1} = -\frac{M_0}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{R_1^2}, \quad \theta'' = \frac{v_\theta(R_2)}{R_2} = -\frac{M_0}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{R_2^2}.$$

Взаимный угол поворота этих точек:

$$\Delta\theta = \theta'' - \theta' = \frac{M_0}{4\pi\mu} \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2}.$$

Использование численных значений, характерных для двигателя МС-14, приводит к следующему результату. Взаимное смещение точек принимает значения порядка десятков микрон, что находится в пределах чувствительности индуктивных датчиков положения.

### Выводы

1. В работе сформулирована и решена граничная задача теории упругости для двухсвязной области, моделирующей приводную шестерню авиационного двигателя.

2. Выполнена проверка решения и подтвержден сдвиговый характер деформации.

3. Оценено взаимное смещение точек на контурах области. Результат превосходит порог чувствительности индуктивных датчиков. Следовательно, деформация приводной шестерни может быть использована для оценки мощности двигателя в режиме реального времени.

### Список литературы

1. Кузьмичева А. О. Формирование информационных потоков, используемых для управления и диагностирования авиационных ГТД / Кузьмичева А. О., Мельникова Н. С., Корот-

- ков В. Б. // Вестник двигателестроения. – 2009. – № 2. – С. 189–192.
2. Test and validation of amicrowave tip clearance sensor on a 25mw gas turbine engine / D. Kwapisz, M. Hafner, V. Spitsyn etc. // Вестник двигателестроения. – 2011. – № 2. – С. 152–161.
  3. Губайдуллин И. Т. Потенциал и реальные возможности оптико-электронной пирометрической системы для решения задач контроля и диагностики теплонапряженного состояния рабочих лопаток турбины авиационных ГТД / Губайдуллин И. Т. // Вестник двигателестроения. – 2009. – № 3. – С. 189–194.
  4. Индуктивный прецизионный датчик линейных перемещений [Эл. ресурс]. – Режим доступа: <http://www.startsensor.com/catalog.php?id=156>.
  5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мухелишвили Н. И. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

Поступила в редакцию 13.03.2014

#### **Анпілогов Д.І. Оцінка зсувної деформації привідної шестерні авіаційного двигуна**

*Побудовано аналітичний розв'язок задачі теорії пружності для двохзв'язної області, яка моделює привідну шестерню авіаційного двигуна. Оцінено взаємні зміщення точок на межах області. Встановлено, що ці зміщення є достатніми для використання індуктивних сенсорів.*

**Ключові слова:** *пласка задача теорії пружності, граничні умови, комплексні потенціали, крутний момент, зсувна деформація, сенсор положення.*

#### **Anpilogov D. Evaluation of shear strain of aircraft engine drive gear**

*The analytical solution of the elasticity problem for doubly connected domain, modeling the aircraft engine drive gear, is built. The mutual displacement of the boundary points is evaluated. Established that points displacement is sufficient for the inductive sensors using.*

**Key words:** *plane problem of elasticity theory, boundary conditions, complex potentials, torque, shear deformation, the position sensor.*