

УДК 539.3

Канд. техн. наук А. В. Засовенко

Запорізький національний технічний університет, м. Запоріжжя

ПРО ДІЮ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНУ БАЛКУ

В роботі розглядається дія рухомого навантаження на шарнірно оперту пружно-пластичну балку кінцевої довжини, що лежить на односторонній пружній основі. Задача розв'язується чисельно з використанням узагальнення сітково-характеристичного методу та ітераційного підходу.

Ключові слова: рухоме навантаження, пружно-пластична балка, метод лінеаризації Ньютона-Канторовіча, ітераційний процес, метод характеристик.

У багатьох випадках, що представляють науковий і прикладний інтерес, швидкості і інтенсивності навантажень при динамічній дії на елементи конструкцій такі, що матеріал випробовує значні необоротні деформації, які звуться пластичними.

Останнім часом з інтенсифікацією навантажень на транспорті, з новими технологіями зміцнення матеріалів, і для розв'язку великої кількості інших технічних завдань, які ставить перед нами практика, виникла необхідність побудови моделі, що поєднала б в собі пластичні вигини і рухоме навантаження. У ряді нечисленних робіт [1, 2] проводилися спроби отримати подібну модель. У роботі [3] для розв'язку з надзвуковою швидкістю по пружно-в'язко-пластичному напівпростору також застосовувався метод характеристик, але для квазілінійної системи рівнянь. Подальшого розвитку ці моделі не отримали.

Розглянемо систему з шарнірно опертої пружно-пластичної балки на односторонній пружній основі, яка знаходиться під дією рухомого навантаження. Рівняння, що описують деформування пружно-пластичної балки з урахуванням механічного навантаження і реакції основи, дає систему рівнянь [4–6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + q(x,t) - R(x,t) = \rho S \frac{\partial v}{\partial t}; \\ \frac{\partial M}{\partial x} - Q = \rho J \frac{\partial \omega}{\partial t}; \\ EJ \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial t} + k^*(M - M_s); \\ GSk^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \omega \right) = \frac{\partial Q}{\partial t} + k^*(Q - Q_s). \end{cases} \quad (1)$$

Тут E – модуль пружності матеріалу балки (модуль Юнга), G – модуль зрушення, J – момент інерції поперечного перетину балки, S – площа

поперечного перетину балки, k^2 – коефіцієнт зрушення, ρ – щільність матеріалів балок, x – координата, що вимірюється від лівого кінця балки ($0 \leq x \leq L$), t – час, $q(x,t)$ – механічне навантаження, $R(x,t)$ – реакція основи.

Рівняння (1) справедливі лише в процесі навантаження у пластичній зоні. Оскільки для розвитку пластичної течії потрібен час, то можна припустити, що зв'язок між напруженням і деформацією у фронті хвилі повністю пружний. А в пружній зоні і при розвантаженні $k^* = 0$, тобто рівняння (1) приймають вигляд, як для пружної балки [7].

Як і для пружної балки, слід доповнити рівняння (1) початковими і крайовими умовами, що відповідають шарнірно опертим кінцям [7]. Так само використовуючи зв'язок з безрозмірними змінними:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{tc_b}{L}, \quad V = \frac{v}{c_b}, \quad W = \frac{\omega L}{c_b}, \quad \tilde{M} = \frac{M}{SEL}, \quad \tilde{Q} = \frac{Q}{SE},$$

представимо систему рівнянь (1) в безрозмірному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial \tilde{t}} = \tilde{R}(\xi, \tilde{t}) - \tilde{q}(\xi, \tilde{t}); \\ \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \xi} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial W}{\partial \tilde{t}} = \tilde{Q}; \\ \frac{\partial W}{\partial \xi} - C_1^2 \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \tilde{t}} = P_1 \tilde{F}_1; \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{t}} = P_2 \tilde{F}_2. \end{cases} \quad (2)$$

Тут $C_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ та $C_2 = \sqrt{\frac{Gk^2}{\rho}}$ – швидкості розповсюдження хвиль, безрозмірні функції

$$\tilde{F}_1 = \tilde{M} - \tilde{M}_S \quad \text{і} \quad \tilde{F}_2 = \tilde{Q} - \tilde{Q}_S, \quad \text{а} \quad P_1 = \frac{SL^3}{JC_1} k^* \quad \text{та}$$

$$P_2 = \frac{LE}{Gk^2 C_1} k^* \quad \text{— безрозмірні коефіцієнти.}$$

Системи диференціальних рівнянь (1) і (2) не є системами диференціальних рівнянь другого порядку. Це пояснюється тим, що як шукані величини вони містять момент M або \tilde{M} , по величині якого встановлюватиметься критерій переходу M_{GP} в пластичну зону [6].

Враховуємо навантаження з інтенсивністю μ , що рухається з постійною швидкістю C_0 і рівномірно розподілено по ділянці δ ($\Delta\xi < \delta \ll 1$):

$$\tilde{q}(\xi, \tilde{t}) = \begin{cases} \mu, & \xi \in [C_0 \tilde{t} - \frac{\delta}{2}; C_0 \tilde{t} + \frac{\delta}{2}] \\ 0, & \xi \notin [C_0 \tilde{t} - \frac{\delta}{2}; C_0 \tilde{t} + \frac{\delta}{2}] \end{cases}. \quad (3)$$

При складній динамічній взаємодії зв'язок між елементами конструкції має обмежену міцність, так що в процесі їх деформації можливе утворення зон відриву одного елемента конструкції від іншого.

Одним з найбільш важливих аспектів розв'язання таких задач є лінеаризація системи диференціальних рівнянь. Нелінійність до рівнянь рівноваги (2) вноситься членом $\tilde{R}(\xi, \tilde{t})$, який відповідає контактному тиску, і визначається нормальними переміщеннями конструкції в межах зони контакту:

$$\tilde{R}(\xi, \tilde{t}) = \frac{F_2}{2} [1 + \text{sign}(\tilde{w})] \tilde{w}, \quad (4)$$

Тут F_2 — безрозмірний коефіцієнт залежний від жорсткості основи, а \tilde{w} — безрозмірні нормальні переміщення, а функція

$$\text{sign}(\tilde{w}) = \begin{cases} 1 & \tilde{w} > 0; \\ 0 & \tilde{w} = 0; \\ -1 & \tilde{w} < 0. \end{cases}$$

Алгоритм чисельного розв'язку задачі заснований на ітераційному методі. Якщо розглядати контактний тиск як додаткове навантаження, його значення на $(k+1)$ -му кроці ітераційного процесу розв'язання нелінійної задачі можна визначити по відомих прогинаннях k -ї ітерації. В межах кроку за часом спочатку задається реакція основи $\tilde{R}(\xi, \tilde{t})$ рівною нулю і розраховується система (2). В результаті на тих ділянках, де вели-

чини контактного тиску будуть негативні, приймемо їх рівними нулю і проведемо перерахунок значень тиску на всіх останніх ділянках, використовуючи для цього відповідні рівняння (2). Якщо на деяких ділянках контактний тиск знову буде негативний, то знову приймемо його рівними нулю. Перехід на наступних крок за часом здійснюється лише тоді, коли різниця величин контактного тиску на всіх ділянках, що відповідають двом послідовним наближенням по модулю, не перевищує допустимого значення.

Співвідношення (4) представляє собою контактний тиск у вигляді суми лінійної і нелінійної функції. Виділимо нелінійну складову у вигляді:

$$\text{sign}(\tilde{w}) \frac{F_2 \tilde{w}}{2} = \frac{F_2}{2} |\tilde{w}| = \frac{F_2}{2} \sqrt{\tilde{w}^2}. \quad (5)$$

Застосуємо тепер для лінеаризації метод Ньютона-Канторовіча [8], згідно якому контактний тиск на $(k+1)$ -й ітерації:

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{(k+1)}(\xi, \tilde{t}) &= \frac{F_2 \tilde{w}^{(k+1)}}{2} + \frac{F_2}{2} \sqrt{(\tilde{w}^{(k)})^2} + \\ &+ \frac{F_2}{2} \frac{\tilde{w}^{(k+1)} \tilde{w}^{(k)}}{\sqrt{(\tilde{w}^{(k)})^2}} - \frac{F_2}{2} \frac{\tilde{w}^{(k)} \tilde{w}^{(k)}}{\sqrt{(\tilde{w}^{(k)})^2}} = \\ &= \frac{F_2 \tilde{w}^{(k+1)}}{2} + \frac{F_2}{2} \frac{\tilde{w}^{(k+1)} \tilde{w}^{(k)}}{\sqrt{(\tilde{w}^{(k)})^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здійснюючи зворотний перехід, отримаємо

$$\tilde{R}^{(k+1)}(\xi, \tilde{t}) = \frac{F_2 \tilde{w}^{(k+1)}}{2} + \text{sign}(\tilde{w}^{(k)}) \frac{F_2 \tilde{w}^{(k+1)}}{2}. \quad (7)$$

Розв'язання системи (2) будується чисельно на основі сітково-характеристичного методу [6, 7]. Для одноманітності розв'язку і застосування обчислювальної техніки, в зонах пружних деформацій або розвантаження, використовується та ж сітка характеристик, що і в зоні пластичної деформації, вважаючи при цьому $k^* = 0$, тобто для (2) $P_1 = P_2 = 0$. Це має значення у разі кінцевих балок, де має місце віддзеркалення хвиль від кінців балки і взаємне проникнення падаючих і відображених хвиль.

При розрахунках задавалися наступні значення початкових параметрів:

$$\Delta \tilde{t} = 0,005; \mu = 5; \gamma = 0; P_1 = 0,375;$$

$$P_2 = 7,157; F_2 = 165;$$

$$\delta = 0,05; C_0 = 0,5; M_{GP} = 0,0002.$$

Результати обчислень у вигляді розподілу моментів, що вигинають, представлені на рис. 1

для моментів часу: $\tilde{t}_1 = 0,5$; $\tilde{t}_2 = 1$; $\tilde{t}_3 = 1,5$; $\tilde{t}_4 = 2$. При порівнянні отриманих моментів, що вигинають, з результатами для пружної балки на односторонній пружній основі (рис. 2), видно істотні відмінності. А саме, не тільки максимальні амплітуди моменту, що вигинає, зросли на два

порядки, але також самі моменти, що вигинають, для пружно-пластичної балки, мають інший характер розподілу.

На рис. 3 приведений графік, для безрозмірних величин довжини і часу, з відміченими на ньому зонами пластичної деформації (темним кольором).

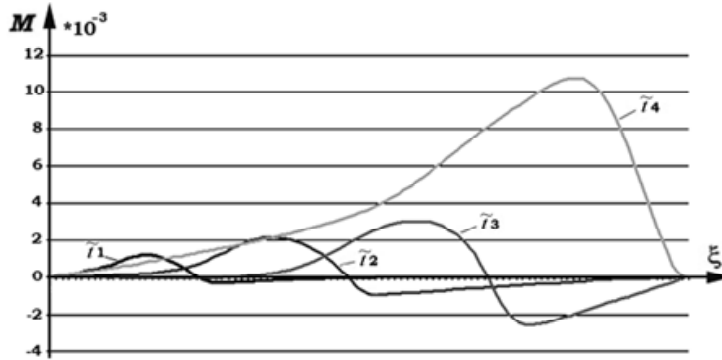


Рис. 1. Розподіл моменту, що вигинає, для пружно-пластичної балки на основі, під дією рухомого навантаження

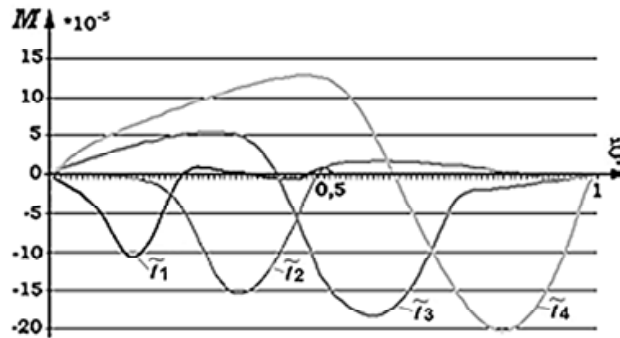


Рис. 2. Розподіл моменту, що вигинає, в пружній балці з односторонньою основою

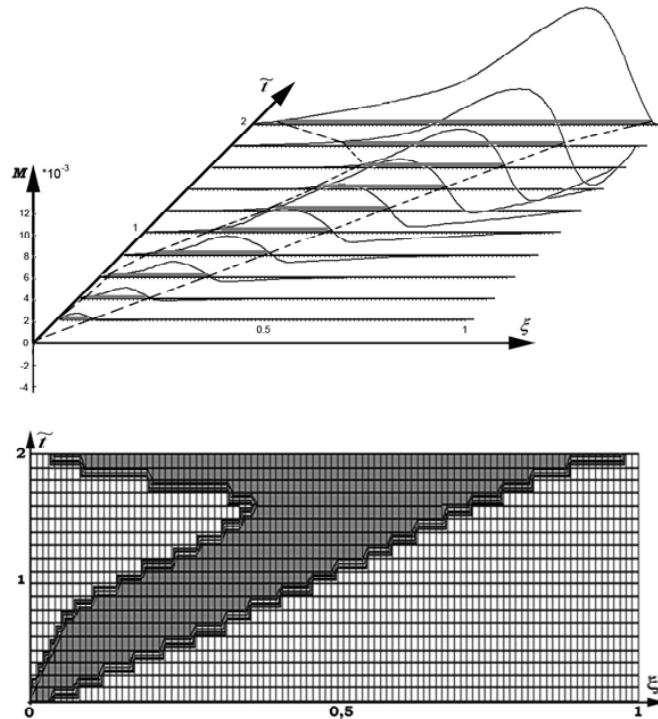


Рис. 3. Зони пластичної деформації для пружно-пластичної балки на основі під дією рухомого навантаження

Як видно з графіка, зони пластичної деформації розташовані поблизу місця прикладення навантаження, а також залежать від швидкості його руху і відзеркалення фронтів хвиль від кінців балки. При досягненні навантаженням кінця балки ($\tilde{t}4 = 2$ при $C_0 = 0,5$), до пластичної деформації схильна практично вся балка, за винятком кінців з шарнірним закріпленням.

Узагальнення сітково-характеристичного методу та ітераційного підходу дозволяє розглядати задачі для пружно-пластичних матеріалів з різними крайовими умовами, навантаженнями і моделями розрахунку без зміни розрахункової схеми, чисельно досліджувати хвильові процеси, викликані нестационарним рухом навантаження, та виявляти зони пластичної деформації.

Аналіз результатів розрахунку показав, що при заданій дії на елементи конструкцій з пружно-пластичного матеріалу, врахування пластичних складових не тільки кількісно, але і якісно змінює характер динамічного процесу. Для конструкцій, що зазнали пластичну деформацію на більшій частині, гостро ставиться питання про можливість їх подальшої експлуатації.

Список літератури

1. Блейх Г. Движение со сверхсейсмической скоростью ступенчатой нагрузки по поверхности упругопластического полупространства / Блейх Г., Мэтьюз А. // Сб. переводов «Механика». — М.: Мир, 1968. — № 1.
2. Быковцев Г. О распространении волн в упруго-вязкопластической среде / Г. Быковцев, Н. Вервейко // «МТТ». — 1966. — № 4.
3. Быковцев Г. Применение метода характеристик к решению задачи о движении ступенчатой нагрузки / Г. Быковцев, Н. Вервейко, Н. Зиновьев // Распространение упругих и упруго-пластических волн: материалы V Всесоюзного симпозиума. — Алма-Ата: Наука, КазССР, 1973. — 364 с.
4. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит — М., 1965. — 488 с.
5. Норейко С. С. Вибрация пролетных строений балочных железнодорожных мостов при высоких скоростях движения / С.С. Норейко // Труды Ленингр. ин-та инженеров жел.-дор. транспорта. — 1961. — № 178.
6. Мастиновский Ю. В. Нестационарное деформирование упруго-вязкопластической балки / Ю. В. Мастиновский, А. В. Засовенко // Вестник двигателестроения — Запоріжжя. — 2008. — № 1. — С. 147–150.
7. Засовенко А. В. Контактное деформирование двух балок конечной длины / А. В. Засовенко, Ю. В. Мастиновский // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. — 2005. — № 2. — С. 40–42.
8. Корн Г. Справочник по математике: для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1973. — 831 с.

Поступила в редакцию 26.05.2014

Засовенко А.В. О действии подвижной нагрузки на упруго-пластическую балку

В работе рассматривается действие подвижной нагрузки на шарнирно опирающуюся упругопластическую балку конечной длины, которая лежит на одностороннем упругом основании. Задача решается численно при помощи обобщения сеточно-характеристического метода и итерационного подхода.

Ключевые слова: подвижная нагрузка, упруго-пластическая балка, метод линеаризации Ньютона-Канторовича, итерационный процесс, метод характеристик.

Zasovenko A. The action of live load on plasto-elastic beam

The paper analyzes the effect of live load on the hinged finite length plasto-elastic beam, which lies on a single-sided elastic foundation. The problem is solved numerically using the generalization of grid-based and iteration approaches.

Key words: live load, plasto-elastic beam, the method of linearization of the Newton-Kantorovich, iterative process, method of characteristics.