

УДК 531; 539.3

**Д-р техн. наук А. Д. Шамровский, канд. техн. наук Ю. А. Лымаренко,
Е. Н. Богданова**

Запорожская государственная инженерная академия, г. Запорожье

ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛАСТОМЕРОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Предложенная в работах [1, 2] дискретная модель сплошной среды для плоских задач теории упругости модифицирована на случай моделирования несжимаемых материалов. Рассматривается случай плоской деформации, характеризующийся в рамках классического континуального подхода вычислительными трудностями, связанными со значениями коэффициента Пуассона, близкими к 0,5.

Ключевые слова: дискретная модель, дискретный элемент конечных размеров, метод последовательных перемещений.

Введение

Широкое применение в технике полимерных материалов, в том числе эластомеров (резин, каучукоподобных материалов), ставит задачу проектирования конструкций, изготовленных на их основе, с учетом эффективности и высокого качества работы. Эластомеры, как конструкционный материал, нашли большое применение именно по ряду ценнейших свойств, отличающихся от свойств традиционных материалов, таких как металлы, пластмассы и др. Это и значительные обратимые деформации и высокая надежность при циклических нагружениях и стойкость к воздействию агрессивной среды.

Основной отличительной чертой расчета эластомеров является наличие слабой сжимаемости, учет которой вызывает определенные затруднения по сравнению с обычными материалами, в которых этот эффект не проявляется. В реальных условиях эксплуатации эластомерные конструкции испытывают механические нагрузки, в связи с чем возникает необходимость исследования напряженно-деформированного состояния. Однако, аналитическое решение задач расчета напряженно-деформированного состояния материалов, обладающих слабой сжимаемостью, наталкивается на определенные вычислительные трудности, связанные со значениями коэффициента Пуассона, близкими к 0,5 ($\nu \rightarrow 0,5$). Использование численных методов расчета, в частности, метода конечных элементов, также приводит к необходимости адаптации традиционных схем расчета к свойствам эластомерных конструкций путем создания специальных схем метода конечных элементов для слабосжимаемых материалов [3].

В то же время большинство эластомерных конструкций, встречающихся на практике, имеет четко выраженную анизотропную структуру, что в еще большей степени затрудняет использование традиционных континуальных моделей теории упругости, а также основанных на этих моделях как аналитических так и численных методов расчета. При этом используемые в теории упругости в качестве альтернативы к континуальным моделям дискретные подходы изначально ориентированы на возможность учета анизотропной структуры материи [4–7]. Однако проблема учета слабой сжимаемости в рамках дискретного подхода все же остается. В данной работе предпринимается попытка решить обозначенную проблему путем использования дискретного элемента, ориентированного на моделирование несжимаемых материалов.

Постановка задачи

Построить дискретную модель, с помощью которой можно было бы исследовать напряженно-деформированное состояние эластомеров, находящихся в состоянии плоской деформации.

Континуальный случай

Уравнения теории упругости для случая плоской деформации имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ E \frac{\partial u}{\partial x} &= \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z), \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z), \\ 0 &= \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (1)$$

Выразив из предпоследнего уравнения σ_z и подставив в третье и четвертое уравнения системы (1) получим:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= (1-v^2)\sigma_x - v(1+v)\sigma_y, \\ E \frac{\partial v}{\partial y} &= -v(1+v)\sigma_x + (1-v^2)\sigma_y. \end{aligned} \quad (2)$$

Разрешим полученную систему относительно напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B \left(\frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \sigma_y = B \left(\frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ B &= \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}, \quad c = \frac{v}{1-v}. \end{aligned} \quad (3)$$

Область применения полученных выражений ограничивается случаем $v \neq 0,5$. А в практических расчетах из рассмотрения необходимо также исключать случаи, когда $v \rightarrow 0,5$ (в связи с большой погрешностью округлений), характерный для эластомерных материалов. Это, в свою очередь приводит к необходимости, в частности, при конечно-элементных расчетах, использовать специально разработанные схемы, например, моментную схему конечного элемента для слабосжимаемых материалов [3].

Рассмотрим отдельно задачу об однородном *растяжении-сжатии* квадратного элемента. Пусть заданы нормальные напряжения $\sigma_x = \text{const}$, $\sigma_y = \text{const}$, а касательное напряжение равно нулю: $\tau_{xy} = 0$. Тогда первые два из уравнений (1) удовлетворяются тождественно, а остальные три уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1-v^2}{E} \sigma_x - \frac{v(1+v)}{E} \sigma_y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1-v^2}{E} \sigma_y - \frac{v(1+v)}{E} \sigma_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Интегрируя первые два из уравнений (4) получаем:

$$\begin{aligned} u &= \left[\frac{1-v^2}{E} \sigma_x - \frac{v(1+v)}{E} \sigma_y \right] \cdot x + f(y), \\ v &= \left[\frac{1-v^2}{E} \sigma_y - \frac{v(1+v)}{E} \sigma_x \right] \cdot y + g(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Функции $f(y)$ и $g(x)$ играют здесь роль констант интегрирования как величины, не зависящие, соответственно, от x и y . Подставляя (5) в

третье из уравнений (4), имеем:

$$\frac{df}{dy} + \frac{dg}{dx} = 0. \quad (6)$$

В уравнении (6) первое слагаемое зависит только от y , а второе — от x . Такое уравнение может удовлетворяться только при постоянных значениях обоих слагаемых:

$$\frac{df}{dy} = C, \quad \frac{dg}{dx} = -C. \quad (7)$$

Интегрирование уравнений (7) дает:

$$f = Cy + C_1, \quad g = -Cx + C_2. \quad (8)$$

Величины C_1 и C_2 — новые константы. Подставляя (8) в (5), получаем:

$$\begin{aligned} u &= \left[\frac{1-v^2}{E} \sigma_x - \frac{v(1+v)}{E} \sigma_y \right] \cdot x + Cy + C_1, \\ v &= \left[\frac{1-v^2}{E} \sigma_y - \frac{v(1+v)}{E} \sigma_x \right] \cdot y - Cx + C_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь константа C_1 задает поступательное перемещение вдоль оси Ox ; константа C_2 — перемещение вдоль оси Oy ; константа C — поворот в плоскости xy . Отбрасывая соответствующие слагаемые, имеем окончательно:

$$\begin{aligned} u &= \left[\frac{1-v^2}{E} \sigma_x - \frac{v(1+v)}{E} \sigma_y \right] \cdot x, \\ v &= \left[\frac{1-v^2}{E} \sigma_y - \frac{v(1+v)}{E} \sigma_x \right] \cdot y. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим более подробно *случай* $v = 0,5$. При этом значении имеем:

$$1-v^2 = 0,75, \quad v(1+v) = 0,75.$$

Из (10) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{0,75}{E} (\sigma_x - \sigma_y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{0,75}{E} (\sigma_x - \sigma_y). \quad (11)$$

Обозначим:

$$\sigma = \sigma_x - \sigma_y. \quad (12)$$

В итоге (11) дает:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{0,75}{E} \sigma. \quad (13)$$

Пользуясь терминами аналитической механики, можно сказать, что от двух обобщенных ко-

ординат σ_x и σ_y мы перешли к одной координате σ . Следовательно, система с двумя степенями свободы превратилась в систему с одной степенью свободы.

Очевидным следствием из (12) будет условие несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (14)$$

Из (10) в этом случае получаем:

$$u = \frac{0,75}{E} \sigma \cdot x, v = -\frac{0,75}{E} \sigma \cdot y. \quad (15)$$

Полученное частное решение уравнений теории упругости описывает напряженно-деформированное состояние бесконечной плоскости xu . Естественно, оно пригодно и для любой части этой плоскости.

Рассмотрим квадратный элемент, изображенный на рисунке 1.

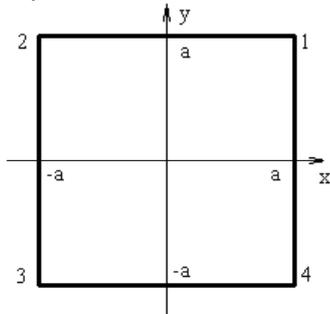


Рис. 1. Моделируемый элемент сплошной среды

Подставляя в (15) координаты угловых точек элемента, получаем:

$$\Delta x_1 = u(a) = \frac{0,75}{E} \sigma \cdot a, \Delta y_1 = v(a) = -\frac{0,75}{E} \sigma \cdot a,$$

$$\Delta x_2 = u(-a) = -\frac{0,75}{E} \sigma \cdot a, \Delta y_2 = v(a) = -\frac{0,75}{E} \sigma \cdot a,$$

$$\Delta x_3 = u(-a) = -\frac{0,75}{E} \sigma \cdot a, \Delta y_3 = v(-a) = \frac{0,75}{E} \sigma \cdot a,$$

$$\Delta x_4 = u(a) = \frac{0,75}{E} \sigma \cdot a, \Delta y_4 = v(-a) = \frac{0,75}{E} \sigma \cdot a. \quad (16)$$

Соответствующая картина перемещений этих угловых точек и деформаций элемента в целом, изображена на рисунке 2. Все угловые точки переместились перпендикулярно диагоналям квадрата; в итоге квадрат превратился в прямоугольник той же площади, что и исходный квадрат (при малых перемещениях угловых точек).

Длины диагоналей квадрата не изменились; эти диагонали совершили повороты как твердые тела (все при том же условии малости перемеще-

ний углов

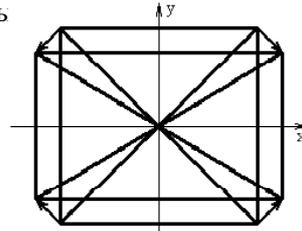


Рис. 2. Перемещения узлов дискретного элемента

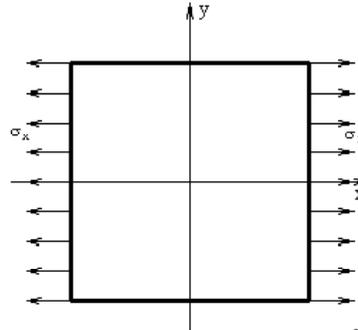


Рис. 3. Случай $\sigma_x = \sigma, \sigma_y = 0$

Обратим особое внимание на тот факт, что в данном случае отсутствует взаимно однозначное соответствие между напряженным и деформированным состояниями элемента. По заданным напряжениям однозначно находятся деформации, но не наоборот. Так, деформации, изображенные на рисунке 2, могут отвечать бесконечному разнообразию напряжений σ_x и σ_y , отвечающих соотношению (12). На рисунках 3–5 изображены некоторые примеры напряжений, отвечающих деформациям с рисунка 2.

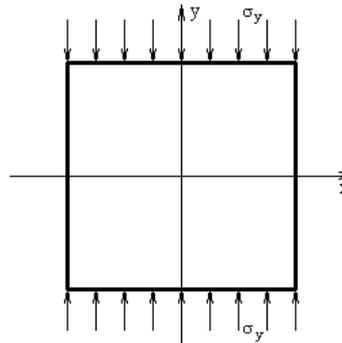


Рис. 4. Случай $\sigma_x = 0, \sigma_y = -\sigma$

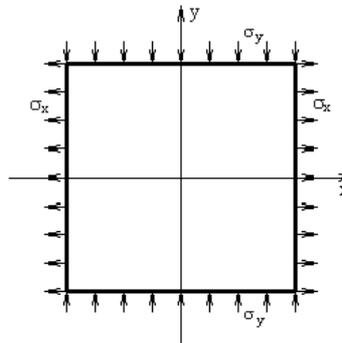


Рис. 5. Случай $\sigma_x = \sigma/2, \sigma_y = -\sigma/2$

Моделирование непрерывного квадратного элемента дискретным элементом

Сконструируем дискретный элемент, моделирующий свойства непрерывного квадратного элемента (рис. 6).

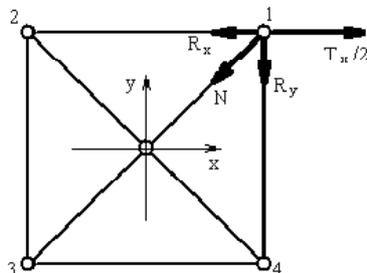


Рис. 6. Силы, приложенные к первому узлу дискретного элемента

Этот элемент состоит из шести стержней; причем диагональные стержни являются абсолютно твердыми, не изменяющими своих длин, а остальные стержни упругие. Размеры дискретного элемента такие же, как и непрерывного (рис. 1), т. е. $2a \times 2a$.

Для нахождения жесткостных характеристик предлагаемой модели рассмотрим задачу об одноосном растяжении-сжатии вдоль оси x . При этом равномерно распределенную нагрузку $\sigma_x = \sigma$, действующую на вертикальные стороны квадрата, заменим на интегральную силу:

$$T_x = 2a\sigma. \quad (17)$$

В свою очередь, разобьем эту силу на две, равные:

$$T_x/2 = a\sigma. \quad (18)$$

Эти силы приложены в угловых узлах дискретного элемента. На рисунке 6 изображена такая сила, приложенная в первом, т. е. правом верхнем узле.

Изобразим также реакции стержней, сходящихся в первом узле (рис. 6). В качестве уравнения равновесия 1-го узла воспользуемся уравнением моментов приложенных сил относительно геометрического центра элемента:

$$R_x \cdot a - R_y \cdot a - \frac{T_x}{2} \cdot a = 0. \quad (19)$$

Задача нахождения двух реакций из одного уравнения равновесия является статически неопределимой, поэтому воспользуемся перемещениями узла, полагая их такими же, как перемещения соответствующей угловой точки непрерывного элемента (16). При этом учтем, что продольная деформация стержня равна удвоенному перемещению его конца. Считая жесткости горизонталь-

ных и вертикальных стержней одинаковыми и равными C , имеем:

$$R_x = 2\Delta x_1 C, R_y = 2\Delta y_1 C = -2\Delta x_1 C = -R_x. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19) имеем:

$$R_x = T_x/4. \quad (21)$$

Отсюда, с учетом (17), получаем:

$$R_x = \frac{a\sigma}{2}. \quad (22)$$

Подстановка в (20) выражения для Δx_1 из (16) дает:

$$R_x = 2 \frac{0,75}{E} a\sigma C. \quad (23)$$

Приравняв выражения для R_x из (22) и (23) имеем окончательно:

$$C = \frac{E}{3}. \quad (24)$$

Таким образом, найдено значение жесткостей горизонтальных и вертикальных стержней, при котором одинаковое горизонтальное нагружение непрерывного и дискретного элементов приводит к одинаковым перемещениям соответствующих угловых точек. В этом легко убедиться, подставляя (22) и (24) в (20) и находя при этом Δx_1 и Δy_1 .

Анализируя найденное значение жесткости (24) и сравнивая его с выражениями, приведенными в работе [2], видим, что значение $C = E/3$ может быть получено из (47) в [2] в результате предельного перехода при $\nu \rightarrow 0,5$ и $h_x = h_y$. Для жесткостей диагональных стержней в случае нагрузки растяжения-сжатия предельный переход дает

$$D_\nu = \lim_{\nu \rightarrow 0,5} \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \rightarrow \infty,$$

что вполне согласуется с полученными ранее выводами об отсутствии деформирования диагональных стержней при рассматриваемом виде нагружения.

Аналогичным образом рассматривая задачу о деформировании квадратных непрерывного и дискретного элементов при изгибной и сдвиговой нагрузках, можно вычислить жесткостные характеристики дискретной модели для этих случаев нагружения. Соответствующие значения также могут быть получены в результате процедуры предельного перехода в выражениях (47) из [2]:

$$C_f = \frac{E}{6(1 - \nu^2)}, D_f = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Рассмотрим теперь следующий существенный

вопрос. На дискретный квадратный элемент действуют сосредоточенные силы (18), приложенные в угловых точках элемента. Эти силы моделируют распределенную горизонтальную внешнюю нагрузку интенсивности $\sigma_x = \sigma$. Внутреннее напряженное состояние элемента моделируют реакции горизонтальных и вертикальных стержней. Реакции диагональных стержней не учитываем, поскольку при поворотах этих стержней как твердых тел относительно центральной точки квадрата эти реакции выполняют нулевую работу.

Две горизонтальных реакции (22) моделируют внутреннее горизонтальное напряжение. Сравнивая с усилиями (18), моделирующими внешнее напряжение, видим, что внутреннее напряжение оказывается вдвое меньшим, т. е. равным $\sigma_x = \sigma/2$.

При горизонтальных растягивающих усилиях вертикальные усилия и соответствующие напряжения получаются сжимающими, т. е. $\sigma_y = -\sigma/2$.

Видно, что внешняя нагрузка, изображенная на рисунке 3, преобразуется во внутреннее напряженное состояние, изображенное на рисунке 5. Аналогично можно показать, что и внешняя сжимающая нагрузка, изображенная на рисунке 4, также преобразуется во внутреннее напряженное состояние, изображенное на рисунке 5.

Таким образом, для построенной дискретной модели имеется однозначная связь между напряженным и деформированным состояниями. При внешнем нагружении, представляющем собой растяжение, сжатие или их произвольную комбинацию, элемент деформируется за счет поворота абсолютно твердых диагональных стержней и с созданием антисимметричного напряженно-деформированного состояния.

Однако следует отметить, что это особенность сконструированной дискретной модели. Рассмотрим другой вариант модели (рис. 7).

Здесь вертикальные стержни отсутствуют (их жесткости равны нулю). В итоге внешнюю нагрузку воспринимают только горизонтальные стержни, в результате чего их реакции удваиваются:

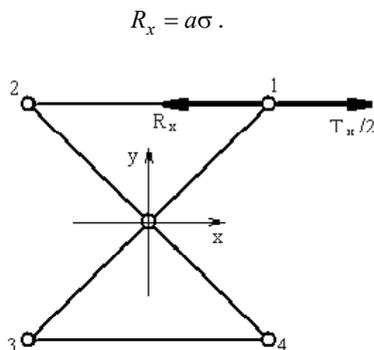


Рис. 7. Альтернативная модель дискретного элемента

Это отвечает удвоенным жесткостям горизонтальных стержней:

$$C = \frac{2E}{3}.$$

Реакции диагональных стержней в данном случае внешнего нагружения отсутствуют. Внутреннее напряженное состояние совпадает с внешним нагружением. Если мы рассмотрим другие виды внешнего нагружения, например, $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = -\sigma$, то внутреннее напряженное состояние останется прежним, т. е. таким, как на рисунке 3. Т. е. в данном случае при любой внешней нагрузке внутри элемента имеем только горизонтальное напряжение $\sigma_x = \sigma$.

Аналогично, если оставить только вертикальные стержни, убрав горизонтальные, то при любой внешней нагрузке получаем вертикальное напряжение: $\sigma_y = -\sigma$.

Можно, при желании, оставлять и горизонтальные и вертикальные стержни, но с разными жесткостями, получая при любой внешней нагрузке соответствующее внутреннее напряженное состояние с пропорцией между горизонтальным и вертикальным напряжениями, задаваемой жесткостями стержней.

Список литературы

1. Шамровский А. Д. Решение плоских статических задач механики деформируемого твердого тела при помощи дискретных моделей, получаемых на основе экспериментальных данных / А. Д. Шамровский, Ю. А. Лымаренко, Д. Н. Колесник // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ : Ліра. – 2011. – Вип. 17. – С. 274–288.
2. Шамровский А. Д. Дискретные модели для плоских статических задач теории упругости / А. Д. Шамровский, Ю. А. Лымаренко, Д. Н. Колесник, Т. А. Миняйло, В. В. Кривуляк // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Серия «Прикладная механика». – 2011. – Вип. 3/7 (51). – С. 11–18.
3. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров: [монография] / В. В. Киричевский. – К.: Наукова думка, 2002. – 655 с.
4. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой: нелокальная теория упругости / И. А. Кунин. – М.: Наука (СО), 1975. – 415 с.
5. Рушицкий Я. Я. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою / Я. Я. Рушицкий, Ц. І. Цурпал. – К.: Ін-т механіки НАНУ. – 377 с.
6. Metrikine A. V. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from

- a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation / A. V. Metrikine, H. Askes // *European Journal of Mechanics A/Solids*. – 2002. – Vol. 21. – P. 555–572.
7. Suiker A. S. J. Micro-mechanical modelling of granular materials – Part 2 – Plane wave propagation in infinite media / A. S. J. Suiker, R. de Borst, C. S. Chang // *Acta Mechanica*. – 2001. – Vol. 149. – P. 181–200.
8. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
9. Шамровський О. Д. Дискретна модель плоского елемента скінченних розмірів для ортотропного середовища / О. Д. Шамровський, Т. О. Міняйло // *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла* – Дніпропетровськ : Ліра, 2012. – Вип. 13. – С. 428–436.

Поступила в редакцію 20.04.2015

Шамровський О.Д., Лимаренко Ю.О., Богданова Є.М. Дискретне моделювання еластомерів, що перебувають в умовах плоскої деформації

Запропонована в роботах [1, 2] дискретна модель суцільного середовища для плоских задач теорії пружності модифікована на випадок моделювання нестискуваних матеріалів. Розглядається випадок плоскої деформації, що характеризується в рамках класичного континуального підходу обчислювальними труднощами, пов'язаними зі значеннями коефіцієнта Пуассона, близькими до 0,5.

Ключові слова: дискретна модель, дискретний елемент кінцевих розмірів, метод послідовних переміщень.

Shamrovskiy A., Lymarenko Y., Bogdanova E. Discrete modeling of elastomers in plane strain

Proposed in [1,2] discrete continuum model for plane elasticity problems is modified in case of modeling incompressible materials. The case of plane strain, characterized in classical continuum approach computational difficulties associated with the values of Poisson's ratio close to 0,5.

Key words: discrete model, a discrete element of finite size, the method of successive movements.