

УДК 629.735

**А. С. ИМАНОВ<sup>1,2</sup>, П.Ш. АБДУЛЛАЕВ<sup>1</sup>**<sup>1</sup> *Национальная Академия Авиации, Баку, Азербайджан*<sup>2</sup> *Азербайджанский технический университет, Баку, Азербайджан***ПРОФИЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ АВИАЦИОННЫХ  
ЛОПАТОК НА БАЗЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
КРИВИЗНЫ**

*Предлагается построение плоских решеток на основе полученных кривых, впервые, из решения дифференциального уравнения кривизны. Указываются оптимальный подбор граничных условий для кривой спинки и корыта. Для достижения геометрических характеристик, приводятся параметры варьирования. Линии спинки, корыта, входной и выходной кромок описываются аналитическими уравнениями, которые в дальнейшем позволят автоматизировать необходимые газодинамические, аэродинамические и другие расчеты. Все этапы построения (значения конкретны) кривой спинки и корыта осуществляются с помощью Mathcad.*

**Ключевые слова:** кривизна, профилирование, кривая спинки, кривая корыта.

**Введение**

Аэродинамические задачи подразделяются на постановку прямой задачи – построение профиля для заданных параметров на входе и выходе с дальнейшим определением потерь на нем, и обратной, то есть создание профиля по заранее принятому характеру изменения скорости по его обводу. В мировой практике проектирования лопаток обратная задача используется очень редко. Одним из главных моментов является необходимость нахождения минимума аэродинамических потерь в решетке при условии, что к проектируемой лопатке предъявляются требования, которые вытекают из обеспечения прочности и особенностей технологического процесса ее изготовления. Тем не менее, решение обратной задачи в двухмерной постановке обладает большими перспективами, потому что позволяет получать лопатки турбин с высоким аэродинамическим качеством при значительном сокращении времени, затрачиваемого на проектирование и доводку [1].

На характер обтекания решетки, потерю энергии и угол выхода потока существенное влияние оказывает кривизна контуров, главным образом, кривизна контура спинки профиля на участке косоугольного среза. Кривые, имеющие наименьшее значение максимальной кривизны, обеспечивают низкий уровень скорости обтекания профиля. Отсутствие перегибов на графике распределения кривизны по профилю обеспечивает плавное изменение скорости от входной кромки к выходной [2]. Плавно меняющаяся кривизна может быть использована для образования профилей.

В настоящее время разработан ряд методов построения плоских решеток путем решения прямой [3] и обратной задачи [4]. Большинство исследователей единодушно в том, что контур профиля решетки, особенно спинки, должен выполняться без скачков кривизны, что обеспечивает плавное изменение скорости потока по профилю решетки.

Предлагается построение плоской решетки на основе решения обратной задачи. Уравнения, описывающие кривую спинки и корыта профиля, получены решением дифференциального уравнения кривизны.

**1. Постановка задачи**

С учетом вышеизложенного рассматриваются основные этапы построения плоской решетки в программной среде MATHCAD.

По предложенной методике решение задачи профилирования на основе обратной задачи, изменения кривизны вдоль контура представляется заданным, например, в виде элементарной тригонометрической функции, которая сокращает количество итерации и значительно упрощает построение плоских решеток.

Решив дифференциальное уравнение кривизны можно получить функциональную зависимость, описывающую кривую спинки и корытца.

Дифференциальное уравнение кривизны имеет вид:

$$k(x) = \frac{y'''}{3(1+y'^2)^2}, \quad (1)$$

где  $k(x)$  – функция кривизны;  
 $y$  – функция уравнения кривой профиля. Уравнение (1) не содержит явным образом искомой функции  $y$ .

Кривизна  $k(x)$  выбирается по следующим критериям:

1. Функция  $k(x)$  должна быть простой и интегрируемой.

2. При положительных значениях  $x$ , значения  $k(x)$  должны принимать отрицательные значения, так как кривая профиля должна быть выпуклой вверх и не должна иметь более одного экстремума.

3. Желательно наличие в начале координат плавного перехода прямой в кривую. Для этого необходимо, чтобы в начале координат значение  $k(x)=0$ .

4. Кривая, описывающая кривизну должна быть плавной в заданном интервале.

За кривую, удовлетворяющую вышеуказанным критериям, можно принять элементарную тригонометрическую функцию. Например:

$$k(x) = -0, a \sin(p \cdot x). \quad (2)$$

В интервале  $[0, \pi]$ .

где,  $a$  – максимальное значение кривизны в заданном интервале;  $p$  – масштабный множитель аргумента.

Решение дифференциального уравнения (1), с учетом (2) приводит к выражению [5]

$$y = \frac{1}{p} \ln \left( \frac{\sin(p \cdot x) + \sqrt{B^2 - \cos^2(p \cdot x)}}{\sin(p \cdot x_1) + \sqrt{B^2 - \cos^2(p \cdot x_1)}} \right) + y_2, \quad (3)$$

где  $B=p/a$ ;

$y_2$  – значение функции спинки или корыта при значении аргумента  $x_1$  [3].

Уравнение профильных кривых (3) получено с учетом того, что система координат, у которой ось  $x$  параллельна оси турбины, а ось  $y$  совпадает с фронтом решетки у выходных кромок. Начало координат принимается центр выходной кромки.

## 2. Алгоритм построения сечения

Профиль строится в декартовой системе координат. Излагаемый ниже метод аналитического профилирования лопаток турбин на основе (3) для образования спинки и корыта профиля позволяет варьировать контуры профилей в широких пределах и в максимальной степени удовлетворять всем требованиям аэродинамики, конструкций, прочности и технологии.

Плоский профиль, полученный на основе (3), имеет определенные величины геометрии, в которые обычно входят хорда  $L$ , шаг решетки

$T$ , конструктивные углы входа  $\beta_{1Г}$  и выхода  $\beta_{2Г}$ , площадь сечения  $F$ , радиусы скругления кромок  $r_1$  и  $r_2$ , размер минимального проходного сечения межлопаточного канала или угол  $\beta_{2эф}$ , а также угол отгиба выходной кромки.

Однозначную связь исходных данных с граничными условиями для составления уравнений спинки и корыта установить невозможно, поэтому значения граничных условий, сначала задают приблизительно, а затем уточняются до получения всех заданных геометрических характеристик.

Решения всех уравнений и построения кривых спинки и корыта проводилось в программе Mathcad.

Для дальнейших вычислений удобнее, чтобы профиль был расположен в диапазоне изменения  $x$  от нуля до единицы, поэтому целесообразно перейти к относительным величинам заданных геометрических размеров.

Основные этапы алгоритма следующие:

1. В качестве исходных данных для профилирования вводим величины:  $\beta_{1Г}=75^\circ$ ,  $\beta_{2Г}=26^\circ$ ,  $r_1 = 2,1$ ,  $r_2 = 0,6$ ,  $\beta_{2эф} = 25^\circ$ ,  $L = 50$ ,  $\bar{t} = 0,58$ ,  $F = 410 \text{ mm}^2$  (fs).

Для применения в формулах углы, заданные в градусах, переводятся в радианы.

2. Значения – угол установки профиля в решетке, вычисляется по следующей формуле:

$$\gamma = 13,59 + 0,628(\beta_{1Г} - \beta_{2Г}) - 0,0028(\beta_{1Г} - \beta_{2Г})^2 = 37,6392$$

принимая  $\gamma = 36,8^\circ$ .

3. Ширина решетки вычисляется по формуле

$$B = L \cos \left( \gamma \frac{\pi}{180^\circ} \right) = 40,0366.$$

4. Вычисляются относительные величины заданных геометрических размеров:

$$L = \frac{L}{B} = 1,2489, f_s = \frac{410}{B^2} = 0,2558,$$

$$r_1 = \frac{r_1}{B} = 0,0525, r_2 = \frac{r_2}{B} = 0,015.$$

5. Определяются другие величины по известной методике [2]:

$$c_{\max} = 1,3 \frac{f_s}{L} = 0,2663, \omega_1 = 1,2,5 \frac{(c_{\max} - 2r_1)}{L} = 0,323,$$

$$\omega_2 = k_2 \cdot 0,14 \frac{\omega_1}{(0,2 + \omega_1)} = 0,0865,$$

где, при первом приближении значения  $k_1$  и  $k_2$  принимается за 1 ( $\omega_1 = 18,5^\circ$ ,  $\omega_2 = 5^\circ$ ).

$$\beta_1 = \frac{\left( \beta_{1\Gamma} - \frac{\omega_1}{2} \right) \cdot \pi}{180^\circ} = 1,1475,$$

$$\beta_2 = \frac{\left( \beta_{2\Gamma} - \frac{\omega_2}{2} \right) \cdot \pi}{180^\circ} = 0,4106$$

6. Находят некоторые величины:

$$\Delta_{b1} = r_1 \cdot \sin(\beta_1) = 0,0478,$$

$$\Delta_{b2} = r_2 \cdot (1 - \cos(\beta_2)) = 0,0012,$$

$$b_{x1} = 1 - (r_2 + r_1) = 0,9326,$$

$b_{x1}$  – расстояние между центрами входной и выходной кромок.

$$y_{c1} = b_{x1} \cdot \tan\left(\gamma \frac{\pi}{180^\circ}\right) + \Delta_{b1} = 0,7475,$$

$$y_{c2} = r_2 \sin(\beta_2) = 0,006,$$

$$p_{x1} = b_{x1} + r_1 \cos(\beta_1) = 0,9541,$$

где  $y_{c2}$  и  $y_{c1}$  начальные и конечные значения ординат спинки лопатки.  $p_{x1}$  – расстояние от начала координат до  $x_1$ .

$$x_2 = r_2 \cos(\beta_2) = -0,0137, \quad x_1 = p_{x1} = 0,9541$$

Для определения значений  $B_1$  используются следующие краевые условия.

$$y'_c|_{x=x_{c1}} = -\text{ctg}(\beta_{1c}) \quad \text{и} \quad y'_c|_{x=x_{c2}} = -\text{ctg}(\beta_{2c})$$

Подставляя эти значения в (3), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \text{ctg}\beta_{2c} = \frac{\cos(p \cdot x_{c2})}{\sqrt{B_1^2 - \cos^2(p \cdot x_{c2})}} \\ \text{ctg}\beta_{1c} = -\frac{\cos(p \cdot x_{c1})}{\sqrt{B_1^2 - \cos^2(p \cdot x_{c1})}} \end{cases}$$

Решив эту систему относительно  $p$  и  $B_1$  получим:

$$B_1 = \frac{\cos(p \cdot x_{c1})}{\cos(\beta_{c1})}$$

7. Для определения  $a$  и  $p$  выполняются следующие действия. Вводим начальные значения  $P = 2$ , и  $b_1 = -1,0$ .

В Mathcad совместно решаются следующие два уравнения:

$$\begin{cases} y_{c1} = \frac{1}{p} \ln \left( \frac{\sin(p \cdot x_1) + \sqrt{b_1^2 - \cos^2(p \cdot x_1)}}{\sin(p \cdot x_2) + \sqrt{b_1^2 - \cos^2(p \cdot x_2)}} \right) + y_{c2} \\ b_1 = \frac{\cos(p \cdot p_{x1})}{\cos(\beta_1)} \end{cases}$$

и определяются значения  $a$  и  $p$

$$b_2 = -1,0839, \quad a = \frac{p}{b_2} = -1,9651, \quad p = 2,13.$$

На рис. 1 показана кривая спинки, где уравнение спинки имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{p} \ln \left( \frac{\sin(px) + \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - \cos^2(px)}}{\sin(px_2) + \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - \cos^2(px_2)}} \right) + y_{c2}. \quad (4)$$

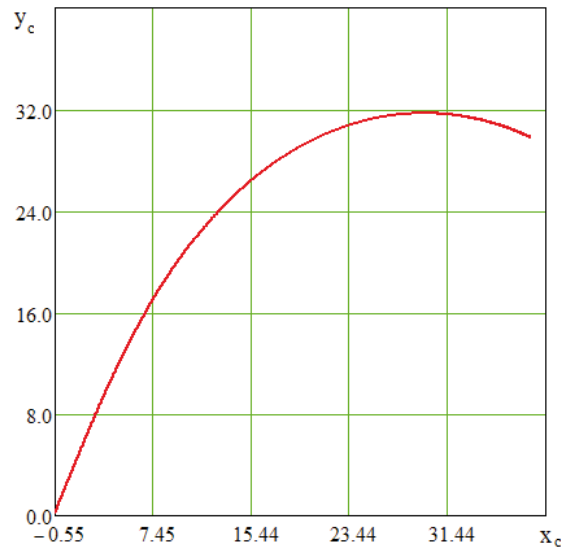


Рис. 1. Кривая спинки профиля

8. Сравниваются значения производной в начале и в конце кривой с заданными значениями соответственно  $\beta_{c1}$  и  $\beta_{c2}$ .

$$y_2 = \frac{\cos(p \cdot x_2)}{\sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - \cos^2(p \cdot x_2)}} = 2,3847,$$

$$y_{2pr} = 90^\circ - a \tan(y_2) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 22,7501^\circ,$$

$$b_{s2} = \beta_2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 23,523^\circ,$$

$$y_1 = \frac{\cos(p \cdot x_1)}{\sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - \cos(p \cdot x_1)^2}} = -0,4505,$$

$$y_{1pr} = 90^\circ - a \tan(y_1) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 65,7467^\circ,$$

$$b_{S1} = \beta_1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 65,7467^\circ,$$

где,  $y_2, y_1$  соответственно, первая производная (4) в точках  $x_1$  и  $x_2$ .

Если  $y_{2pr}$  (угол выхода потока, полученный на основе (4)) не соответствует значению  $b_{S2}$ , то корректируется  $\beta_{2r}$  и вычисления повторяются с пункта 1. Корректировка продолжается до совпадения  $y_{2pr}$  и  $b_{S2}$  до допустимой их погрешности.

9. Для построения окружности в начальной и конечной кромках применяется уравнение окружности

$$f_{nok}(x) = \sqrt{r_1^2 - (x - \Delta x)^2} + \Delta y,$$

где  $\Delta x = 1 - r_1 - r_2 = 0,9326$ ,

$\Delta y = f(x_1) - r_1 \cdot \sin(\beta_1) = 0,6976$ .  $f(x_1)$  — находят

по (4).  $x_{nokc1} = x_1 = 0,9541$ ,  $x_{nokc2} = 1 - r_2 = 0,085$ ,  $[x_{nokc1}; x_{nokc2}]$  — интервал для построения входной окружности у спинки.

Для выходной кромки применяется уравнение окружности

$$f_{vix}(x) = \sqrt{r_2^2 - x^2}$$

$$x_{vixc1} = -r_2 = -0,0015, \quad x_{vixc2} = x_2 = -0,0137$$

$[x_{vixc1}; x_{vixc2}]$  — интервал для построения выходной окружности у спинки.

10. Площадь под кривой спинки определяется по следующим уравнениям:

$$f_{vixc} = \int_{x_{vixc1}}^{x_2} f_{vix}(x) dx = 5,0088 \times 10^{-6},$$

$$f_c = \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx = 0,5897,$$

$$f_{noc} = \int_{x_1}^{x_{nokc2}} f_{nok}(x) dx = 0,0226,$$

$$F_c = f_{vixc} + f_c + f_{noc} = 0,6123,$$

где,  $f_{vix}$  — площадь под выходной кромкой;  $f_{noc}$  — площадь под входной кромкой;

$f_c$  — площадь под кривой спинки;  $F_c$  — суммарная площадь под кривой спинки.

11. Этапы построения кривой корыта:

Определяем начальные и конечные углы входа ( $\beta_{1k}$ ) и выхода ( $\beta_{2k}$ ) корыта.

$$\beta_{1k} = \frac{\left(\beta_{1\Gamma + \frac{\omega_1}{2}}\right) \cdot \pi}{180^\circ} = 1,4705,$$

$$\beta_{2k} = \frac{\left(\beta_{2\Gamma + \frac{\omega_2}{2}}\right) \cdot \pi}{180^\circ} = 0,497,$$

$$x_{k2} = r_2 \cdot \cos(\beta_{2k}) = 0,0132,$$

$$x_{k1} = b_{x1} - r_1 \cos(\beta_{1k}) = 0,9273,$$

$$y_{k2} = r_2 \cdot \sin(\beta_{2k})$$

$$y_{k1} = b_{x1} \cdot \tan\left(\gamma \frac{\pi}{180^\circ}\right) - r_1 \cdot \sin(\beta_{1k}) = 0,6455$$

$[x_{k1}; y_{k1}] - [x_{k2}; y_{k2}]$  — координаты начальной и конечной точки кривой корыта.

Для определения  $a_k$  и  $p_k$  выполняются следующие действия. Вводим начальные значения

$$p_k = 2 \quad b_{1k} = -1,01.$$

В Mathcad совместно решаются следующие два уравнения:

$$\begin{cases} y_{k1} = \frac{1}{p_k} \ln \left( \frac{\sin(p_k x_{k1}) + \sqrt{b_{1k}^2 - \cos^2(p_k x_{k1})}}{\sin(p_k x_{k2}) + \sqrt{b_{1k}^2 - \cos^2(p_k x_{k2})}} \right) - y_{k2} \\ b_{1k} = \frac{\cos(p_k \cdot p_{x1})}{\cos(\beta_{1k})} \\ \beta_{1k} = \frac{\cos(p_k \cdot x_{k1})}{\cos(\beta_{1k})} \end{cases}$$

определяется значения  $p_k$  и  $a_k$ .

$$p_k = 1,8223, \quad a_k = \frac{p_k}{b_2} = -1,5369.$$

В интервале  $x_k = [x_{k2}; x_{k1}]$  по формуле (5) строится кривая корыта.

$$f_k(x) = \frac{1}{p_k} \ln \left( \frac{\sin(p_k x) + \sqrt{\left(\frac{p_k}{a_k}\right)^2 - \cos^2(p_k x)}}{\sin(p_k x_{k2}) + \sqrt{\left(\frac{p_k}{a_k}\right)^2 - \cos^2(p_k x_{k2})}} \right) - y_{k2}. \quad (5)$$

12. Этапы вычисления пункта 8 – 10 для спинки повторяются для корыта и строится полный профиль лопатки (рис. 2).

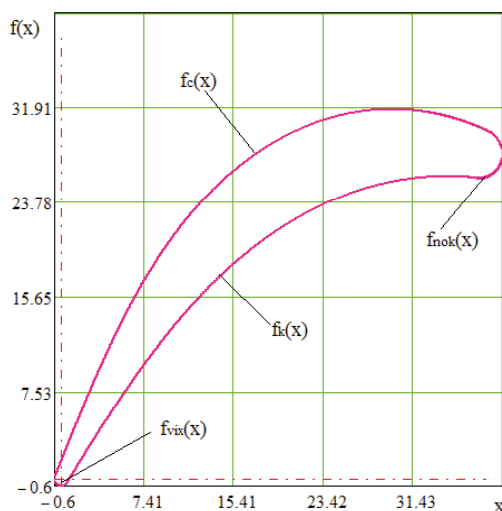


Рис. 2. Профиль лопатки полученный Mathcad:

$f_c(x)$   $f_k(x)$  – кривая спинки,  $f_k(x)$   $f_k(x)$  – кривая корыта,  $f_{nok}(x)$  – кривая входной кромки,  $f_{vix}(x)$  – кривая выходной кромки

13. Совместно решив уравнения прямой, проходящей через точки  $[0, t]$ ,  $[x_d, y_d]$  (координаты второго конца отрезка горла, на спинке соседнего профиля, рисунок 3) и уравнения спинки (4) получим значения неизвестных  $x_d$ ,  $y_d$ . Вычислив расстояние между точками  $[x_{dk}, y_{dk}]$  (точка пересечения прямой с кривой корыта),  $[x_d, y_d]$  определяем величину значения выходного горла  $\beta_{2эф} = 12,2559$ .

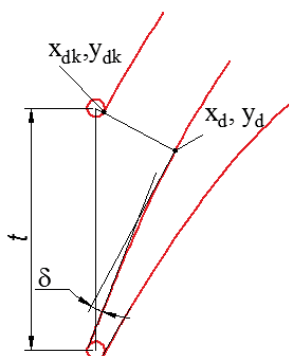


Рис. 3. К определению координаты точки  $x_d, y_d$

Для достижения необходимого значения горла  $\gamma$  корректируется по формуле  $\gamma = \gamma + \Delta\gamma$  и вычисления повторяются с пункта 1.

Этот метод применяется для определения размера входного горла.

14. Угол отгиба находим по формуле:

$$\delta = (90^\circ - y_{2pr}) - a \tan\left(\frac{df(x)}{dx_d}\right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 15^\circ$$

где  $y_{2pr}$  – значение  $\beta_2$ , вычисленное по формуле (4).

15. Площадь оценивается по формуле

$$F = (F_c - F_k) \cdot b^2 = 253,$$

где  $F_c$  – площадь под кривой спинки;  $F_k$  – площадь под кривой корыта.

Меняя значения  $k_1$  в пункте 1 можно получить необходимое значение F.

### 3. Результаты

На рисунке 3 показан график кривизны спинки  $y_c = a \cdot \sin(p \cdot x)$  и корыта  $y_k = a_k \cdot \sin(p_k \cdot x)$

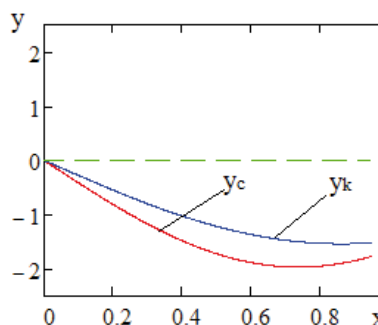


Рис. 4. Кривизна спинки ( $y_c$ ) и корыта ( $y_k$ )

Как видно из рис. 4 кривизна по всему профилю меняется плавно, что подтверждает изменения скорости обтекания без скачков [5,6].

Для окончательного построения оптимального профиля плоской решетки необходима проверка на прочность и оценка технологичности.

### Заключение

В дальнейших исследованиях предусмотрено проведение проверки на прочность и оценка технологичности, а также CFD анализ решетки и 3D моделирование на основе полученной плоской сечения.

Предложенная функциональная зависимость (4) рекомендуется для аналитического построения активных и реактивных плоских решеток осевых турбин.

### Литература

1. Van den Braembussche R. A. Turbomachinery component design by means of CFD [Текст] / R. A. Van den Braembussche // Task Quarterly Journal. – 2002. – Vol. 6. – No 1. – p. 39–61.

2. Аронов Б.М. Профилирование лопаток авиационных газовых турбин [Текст] / Б.М. Аронов, М.И. Жуковский, В.А. Журавлев. – М. Машиностроение, 1975. – 191с.
3. Мустафаев М.Р. Профилирование сечения лопаток турбины на основе решения уравнения кривизны [Текст] /М.Р. Мустафаев, П.Ш. Абдуллаев, Ю.М. Ашуров // Харьков, авиационно-космическая техника и технология – 2010, –№4. –С. 95 –101.
4. Соколовский Г. А. Профилирование решеток на основе решения обратной задач [Текст]/ Г. А. Соколовский, В.И. Гнесин, В.А. Ванин. – // Энергетическое машиностроение: вып.34 – 1984. – № 3. –С.43 –48.
5. Иманов А.С. Профилирование лопаток по геометрическому критерию качества на основе решения обратной задач [Текст] / А.С. Иманов. //Авиационная техника: Изв. вузов. – 2003 г. – № 1. – С. 64 –66.
6. Бойко А.Б. Оптимальное проектирование проточной части осевых турбин: изв. ХГУ [Текст] / А.Б. Бойко. – Харьков, «Высшая школа», 1982. – 151с.

Поступила в редакцию 07.05.2015

**А. С. Иманов, П.Ш. Абдуллаев. Профілізації плоских авіаційних лопаток на базі диференціального рівняння кривизни**

*Пропонується побудова плоских ґрат на основі отриманих кривих, уперше, з рішення диференціального рівняння кривизни. Вказуються оптимальний підбір граничних умов для кривої спинки і корита. Для досягнення геометричних характеристик, наводяться параметри варіювання. Лінії спинки, корита, вхідній і вихідній кромок описуються аналітичними рівняннями, які надалі дозволять автоматизувати необхідні газодинамічні, аеродинамічні і інші розрахунки. Усі етапи побудови (значення конкретні) кривої спинки і корита здійснюються за допомогою Mathcad.*

**Ключові слова:** кривизна, профілізація, крива спинки, крива корита.

**A.S. Imanov, P.Sh. Abdullayev. Profiling of flat aviation shoulder –blades on base of differential equalization of curvature**

*The construction of flat grates is offered on the basis of the got curves, first, from the decision of differential equalization of curvature. Specified optimal selection of border terms for the crooked back and washtub. For the achievement of geometrical descriptions, parameters over of varying are brought. To the line of back, washtub, an entrance and output edges described by analytical equalizations, that in future will allow to automatize necessary gas –dynamic, aerodynamic and other calculations. All stages of construction (values are certain) of the crooked back and washtub come true by means of Mathcad.*

**Key words:** curvature, profiling, crooked back, curve of washtub.