

УДК 004.942 : 629.4.001.4

**В.Ф. МИРГОРОД**

АО «Элемент», Одесса, Украина

## ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

*В работе предлагается подход к построению численных алгоритмов компьютерной реализации математических моделей в виде дробно-интегральных операторов. Эквивалентное представление таких математических моделей предлагается отыскивать в виде оператора Вольтерры, и для моделирования использовать методы решения интегральных уравнений Вольтерры II-го рода относительно невязки (ошибки) между входом и выходом. Численный алгоритм моделирующей системы состоит в построении нерекурсивного фильтра, замкнутого единичной отрицательной обратной связью, что позволяет получить рекурсивную форму реализации заданного оператора преобразования. Разработано и реализовано программно-алгоритмическое обеспечение для предлагаемого подхода. Решены в численном виде тестовые примеры для дробного апериодического звена.*

**Ключевые слова:** математическая модель, интегральные уравнения, температурный режим.

### Введение

Температурный режим газотурбинного двигателя (ГТД) и его изменение в процессе эксплуатации является одним из основных факторов при определении технического состояния ГТД. Проблемный вопрос оценки температурного режима состоит в несовершенстве инструментальных средств, которые, в силу их инерционности, не позволяют установить фактическое изменение температуры газов в динамических режимах. Важная научно-прикладная задача состоит в создании математических моделей (ММ) как изменения температурного режима ГТД, так и измерительных каналов (ИК), которые адекватно отражают реальные процессы и соответствуют возможностям компьютерной реализации в системах реального времени.

### 1. Формулирование проблемы

Известно, что в режиме приемистости ГТД измеренная термопарами (ТП) температура газов далеко не соответствует фактической [1,2]: Причина такого явления состоит в «инерционности» ИК температуры. Действительно, время приемистости АИ-25ТЛШ составляет до 5 секунд, а «инерционность» термопары Т-99 (23) секунды. Естественно, фактический заброс температуры газов на приемистости не может быть установлен по данным измерений. Аналогичная ситуация имеет место и для турбовальных двигателей, в частности, для АИ-450М. Для восстановления фактического изменения температуры необходимо решить некоррект-

ную обратную задачу: по измеренным данным и ММ ИК восстановить входное воздействие. Применяемые одноемкостные ММ ТП [3] не позволяют решить указанную задачу. Более совершенные двухемкостные ММ, например, в составе ММ Д436-148 для стендов-имитаторов, имеют несколько лучшие характеристики, однако также далеки от необходимых.

Для повышения точности оценки температурного режима ГТД применяются сложные конечномерные аппроксимационные ММ [4]. Идея этого известного [5] подхода основана на подходящей аппроксимации реальной переходной характеристики конечной суммой экспоненциальных функций. Однако, как это установлено в [6], температурные процессы описываются дробно-рациональными передаточными функциями, следовательно, соответствуют бесконечномерному пространству состояний.

Целью настоящей работы является обоснование подхода к численной реализации в рекурсивной форме математических моделей температурного режима ГТД и соответствующих измерительных каналов в классе дробных интегральных операторов.

### 2. Решение проблемы

Дробно-рациональным передаточным функциям отвечают дробным интегро-дифференциальным операторам. Теории таких преобразований посвящены многочисленные работы, в частности [7, 8]. В прикладных приложениях [9, 10] для численной реализации

используются формула Грюнвальда-Летникова и численная реализация интеграла Римана-Луивилля. Предложены [6] усовершенствования таких формул, приспособленные для реализации в системах реального времени. Тем не менее, такие усовершенствования не устраняют, и не могут устранить принципиальный недостаток предлагаемых решений из-за конечности ряда и накопления ошибок.

Действительно, дробный интегральный оператор

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t-s)^{m-1} x(s) ds = \int_0^t h(t-s)x(s) ds, \quad (1)$$

где  $x$  – входной сигнал,

$y$  – выходной сигнал,

$m$  – порядок дробного интегрирования,

является интегралом Вольтерры типа свертки с ядром специального вида. Распространенная формула Грюнвальда-Летникова есть ни что иное, как наиболее простая численная реализация этого интеграла. Очевидно, что при  $m = 1$  (целочисленный интеграл), (1) превращается в обычный интеграл. Однако целочисленный интеграл от входного сигнала никогда численно не реализуется конечной суммой, поскольку известны и применяются рекурсивные алгоритмы его определения.

Идея настоящего исследования состоит в построении рекурсивных алгоритмов для численной реализации операторов Вольтерры, основанных на теории соответствующих интегральных уравнений.

Пусть поставлена задача выполнить численную реализацию оператора Вольтерры:

$$y(t) = V_r \{x(t)\} = \int_0^t r(t,s)x(s) ds. \quad (2)$$

Введем сигнал невязки:

$$e(t) = y(t) - x(t) \quad e(t) = y(t) - x(t). \quad (3)$$

Тогда (2) эквивалентно следующему соотношению:

$$e(t) = y(t) - \int_a^t r(t,s)y(s) ds. \quad (4)$$

Которое является резольвентным решением интегрального уравнения (ИУ) Вольтерры II-го рода вида:

$$e(t) = y(t) - \int_a^t k(t,s)e(s) ds, \quad (5)$$

где ядро ИУ связано с резольвентой известным уравнением [11, Вep]:

$$r(t,s) = k(t,s) - \int_s^t r(t,\lambda)k(\lambda,s) d\lambda. \quad (6)$$

Таким образом, ММ динамической системы в виде (2) может быть эквивалентно представлена в виде ИУ (5), что открывает возможности по численной реализации в рекурсивном виде.

Аналитические решения уравнения (6) для важного класса сепарабельных ядер найдены в [12], что позволяет решить ИУ Вольтерры II-го рода с произвольной правой частью. В [13] найдены аналитические решения классов дискретных аналогов ИУ Вольтерры II-го рода, которые описывают динамику систем с дискретными состояниями и могут быть использованы при дискретизации достаточно общих ИУ для последующего их численного решения.

В том случае, если ядро в ИУ Вольтерры II-го рода является разностным, широкие возможности для решения предоставляет операционный метод. Действительно, в этом случае (6) в операторной форме имеет вид:

$$R(p) = K(p) - K(p)R(p), \quad (7)$$

и искомое изображение ядра определяется соотношением:

$$K(p) = R(p) / [1 - R(p)]. \quad (8)$$

В терминах теории автоматического управления изображение резольвенты есть передаточная функция замкнутой системы, а (2) – интеграл свертки, связывающий ее вход и выход, изображение ядра – передаточная функция разомкнутой системы, импульсная характеристика которой позволяет осуществить рекурсивную форму решения.

В [13] получены аналитические решения в дискретном случае с использованием  $Z$  – преобразования.

Для верификации выбранного подхода выбрана передаточная функция вида:

$$W(p) = R(p) = k / (Tp^m + 1), \quad (9)$$

где  $k$  – коэффициент усиления,

$T$  – выходная постоянная времени,

$m$  – порядок дробного интегрирования.

Переходная функция (8) достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными ИК температурного режима ГТД. После подстановки в (8) получим передаточную функцию разомкнутой системы в виде дробно-интегрального звена.

Согласно предлагаемому подходу, схема численной рекурсивной реализации оператора (9) содержит дробный интегратор порядка  $m$ , охваченный единичной отрицательной обратной связью.

Результаты компьютерного эксперимента заключались в численном определении

переходной функции и сравнении ее с известным аналитическим решением для  $m = 1$  и  $m = 0,5$ , а также построении логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ), наклон которой должен составлять  $-m20 \text{ db/dec}$  в выбранной полосе частот. Тестирование выполнено для  $m = 1$ , когда (8) является аperiодическим звеном первого порядка.

Дискретная свертка (1) реализована в виде нерекурсивного фильтра с шагом 0,1 секунд (для получения ЛАЧХ 0,001 секунд), длина реализации 80100 отсчетов, сольвер приложения Simulink интерактивной среды MATLAB типа ode23t (метод трапеций) с шагом  $1e-6$  секунд. Для получения ЛАЧХ аппроксимация задержек в нерекурсивном фильтре выполнена методом Паде порядка 4.

На рис. 1 представлена общая схема моделирования с одной ячейкой нерекурсивного фильтра, а на рис.2 и рис.3 результаты численного эксперимента.

Следует отметить, что дробный интегральный оператор, реализованный в виде нерекурсивного фильтра в замкнутом контуре моделирования, эффективен только в некоторой полосе частот, нижняя граница которой определяется длиной выборки (окном анализа), а верхняя – шагом дискретизации.

Рекурсивная форма решения позволяет уменьшить ошибки численной реализации заданного оператора.

Если в качестве выхода схемы моделирования использовать сигнал невязки, то получим реализацию звена дробного дифференцирования, наклон ЛАЧХ которого в выбранной полосе частот равен  $+m20 \text{ db/dec}$ .

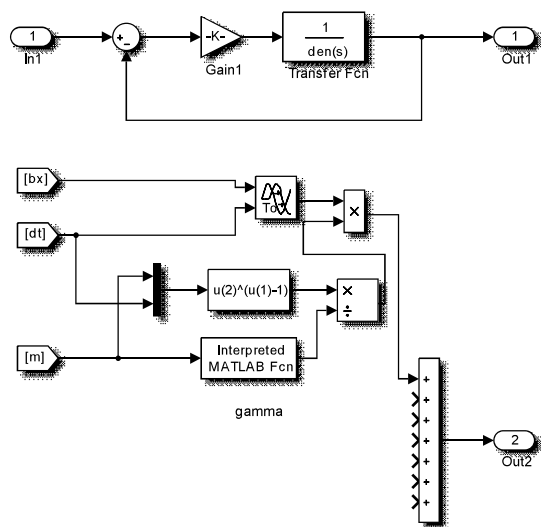


Рис. 1. Схема моделирования

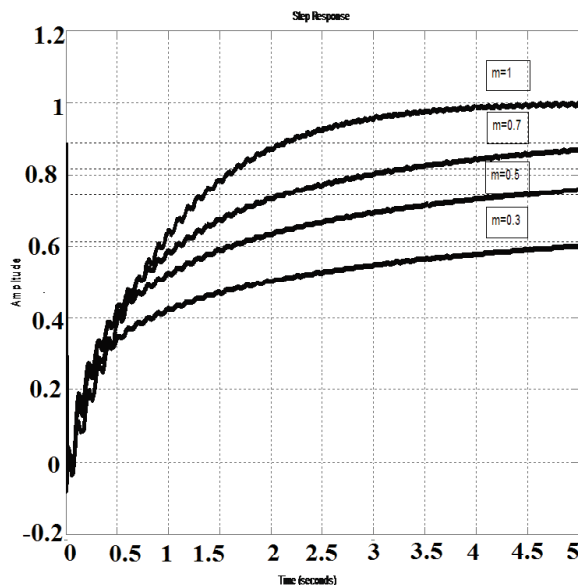


Рис. 2. Переходные характеристики для разных значений показателя дробного интегрирования

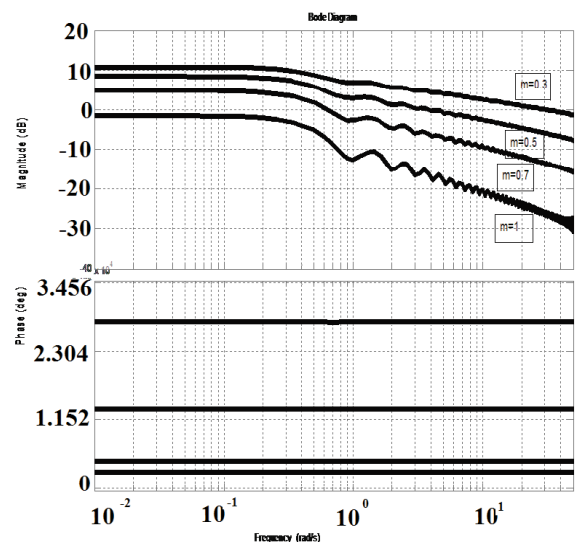


Рис. 3. Логарифмические частотные характеристики для разных значений показателя дробного интегрирования

### Заключение

Используемые конечномерные ММ ИК температурного режима ГТД и изменения его температурного состояния нбе отвечают реальной физической сущности явлений, имеют низкую адекватность и высокую алгоритмическую сложность.

Предлагаемые известные ММ в виде дробно-интегральных операторов отвечают физике изменения температурного режима и процессов его измерения, однако их численная реализация не удовлетворяет требованиям практики по точности решений.

Предлагаемый подход построения численных алгоритмов дробно-интегральных преобразований для оценки температурного режима в рекурсивной форме дает возможность найти компромисс между достигаемой точностью и алгоритмической сложностью.

#### Литература

1. Грудинкин В. М. Разработка и исследование динамических характеристик модернизированного регулятора температуры выходящих газов для двигателя АИ-25ТЛШ [Текст] / В. М. Грудинкин, В. Ф. Миргород // Вестник двигателестроения. – 2004. – №2. – С. 197-201.
2. Грудинкин В. М. Имитационное моделирование и управление температурным режимом ГТД АИ-25 ТЛШ [Текст] / В. М. Грудинкин, В. Ф. Миргород // Авіаційно-космічна техніка і технологія. – 2005. – № 9(25). – С. 211-215.
3. Расширение функциональных возможностей бортового регулятора температуры авиационных двигателей по результатам государственных испытаний / В. М. Грудинкин, В. Ф. Миргород, В. И. Шанькин [и др.] // Авіаційно-космічна техніка і технологія. – 2007. – №9(45). – С. 79-82.
4. Моделирование динамики ГТД с учетом времени его предварительного прогрева / С. В. Епифанов, А. В. Олейник, С. Г. Коломийчук [и др.] // Вестник двигателестроения. – 2005. – № 2. – С. 50-56.
5. Методы и устройства интерпретации экспериментальных данных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов / А. Ф. Верлань, Б. Б. Абдусатаров, А. А. Игнатенко [и др.]. – К. : Наук. думка, 1993. – 258 с.

6. Бушер, В. В. Моделирование систем с дробно-дифференцирующими и дробно-интегрирующими звеньями в SIMULINK [Текст] / В. В. Бушер // Електромеханічні і енергозберігаючі системи : зб. наук. праць. – Кременчук : КрНУ, – 2011. – Вип. 4. – С. 140 – 143.

7. Васильев, В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак. – К. : НАН Украины, 2008. – 256 с.

8. Oldham, K. B. The Fractional Calculus [Text] / K. B. Oldham, J. Spanier // Academic Press, 1974. – 234 p.

9. Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение [Текст] / А. М. Нахушев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 272 с.

10. Садовой, А. В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами [Текст] / А. В. Садовой, Б. В. Сухинин, Ю. В. Сохина ; под общ. ред. А. В. Садового. – К. : ИСИМО, 1996. – 298 с.

11. Верлань, А. Ф. Справочник по интегральным уравнениям [Текст] / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К. : Техника, 1986. – 700 с.

12. Миргород, В. Ф. Обобщение методов аналитического решения некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра второго рода [Текст] / В. Ф. Миргород // Искусственный интеллект. – 2009. – №3. – С. 68-80.

13. Миргород, В. Ф. Методы численной реализации математических моделей динамических процессов в форме интегральных уравнений [Текст] / В. Ф. Миргород, И. М. Гвоздева // Авіаційно-космічна техніка і технологія. – 2012. – №9(96). – С. 229-233.

Поступила в редакцию 16.05.2016

#### **В.Ф. Миргород. Обчислювальна реалізація дрібних інтегральних операторів в задачах моделювання температурного режиму газотурбінних двигунів**

*В роботі пропонується підхід до побудови обчислювальних алгоритмів комп'ютерної реалізації математичних моделей у вигляді дрібно-інтегральних операторів. Еквівалентне представлення таких моделей пропонується відшукувати у вигляді оператора Вольтерри, і для моделювання використовувати методи рішення інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду відносно невязки (похибки) між входом і виходом. Обчислювальний алгоритм моделюючої системи складається в побудові не рекурсивного фільтру, замкненого одиничним від'ємним зворотнім зв'язком, що дозволяє отримати рекурсивну форму заданого оператора перетворення. Розроблено та реалізовано програмно-алгоритмічне забезпечення для запропонованого підходу. Вирішені в обчислювальному вигляді тестові приклади для дрібного аперіодичної ланки.*

**Ключові слова:** математична модель, інтегральні рівняння, температурний режим.

**V.M. Mirgorod. Numeral realization of fractional integrated operators in tasks of modeling of turbo-engines temperature condition of**

*In the paper approach to the construction of numeral algorithms computer realization of mathematical models in the fractional integral operators is offered. Equivalent presentation of such mathematical models is suggested to find in the Volterra operator form and use for modeling the methods of solution of two type Volterra integral equation relatively to a misclosure (errors) between an entrance and exit. The numeral algorithm of the designing system consists in designing of the non-recursive filter which reserved by a single negative feedback that allows to get the recursive form of desired transformation operator realization. The programmatic-algorithmic providing is developed and realized for offered approach. Test examples are solved in a numeral form for a fractional aperiodic link.*

**Keywords:** *mathematical model, integrated equations, temperature conditions.*