УДК 629.7.054

В.Н. МЕЛЬНИК, Г.В. БОЙКО

Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев

ВОЗНИКНОВЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВИБРАЦИИ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА

В работе строится аналитическая модель упругого взаимодействия звуковой волны эксплуатационного использования летного изделия с круглой пластиной. Показана возможность получения приближенного решения и определения по его структуре характера изгибного движения круглой пластины для эксплуатационных условий летных изделий. Раскрывается возможность проявления резонансных особенностей пластины в звуковом поле. Созданы предпосылки для анализа динамики пластины в широком диапазоне натурных условий функционирования в составе высокоманевренных и скоростных объектов, в том числе, крылатых ракет.

Ключевые слова: *матрица координатных функций, круглая пластина, частотный резонанс.*

Введение

Общая мощность двигателей стратегической бомбардировочной авиации (СБА класса В-2А, В-52Н, В-1В) находятся в пределах 10...40 мВт. При этом двигателями инжектируется около 13...40 Т продуктов сгорания топлива (за 150 самолетовылетов их масса составляет около 2...6 кТ). Мощность двигателей самолета тактической и палубной авиации (ТПА) близка к 8...16 мВт и, при этом, выбрасывается в атмосферу около 11...25 Т выхлопных газов.

В акустические колебания трансформируется около 10^{-4} мощности реактивных двигателей. Для одного самолета СБА и ТПА она составляет 1...4 и 0,8...1,6 кВт соответственно. При полете самолета в течение 1 часа, энергия акустических колебаний примерно равна 3,6...14,4 и 2,9...5,8 мДж, соответственно. Один самолет, например, в небе над Ираком (по данным INTERNET – www.irak.ru, www.rambler.ru и др.) в марте 2003 г. во время боевых действий инжектировал в среду суммарное энерговыделение $6\cdot10^3$ Дж (речь идет о продуктах сгорания топлива и акустической энергии). Это соответствует мощности акустических колебаний 0,8...1,6 кВт и энергии 2,9...5,8 мДж.

Частотный спектр акустического излучения реактивных двигателей достаточно широк. Спектральная плотность излучения достигает максимума на частоте f_{max}, которая зависит от диаметра сопла d_s и скорости истечения V_s продуктов сгорания, т.е. числа Струхаля

$$St:\ St=\frac{V_s}{fd_s}.$$

На частоте f_{max} величина $(St)^{-1}=0{,}13$ [1]. Отсюда

$$f_{max}=\frac{0{,}13V_s}{d_s}.$$

Тогда, к примеру, если d_s = 0,1...0,3 м, а $V_s=500...1000$ мс$^{-1}$, то $f_{max}=430...650$ Гц. При уменьшении f, спектральная плотность убывает пропорционально f^2 [2]. Таким образом, на частоте 5 Гц она уменьшается в 10^4 раз. На столь низких частотах, по-видимому, более существенным является излучение, обусловленное движением собственно летательного аппарата, скорость которого V_1 и характерный размер l_1,

то есть: $f_{max}=\frac{V_1}{l_1}(St)^{-1}$.

Так, при $l_1=10$ м, $(St)^{-1}=0{,}1...1$, $V_1=300$ мс$^{-1}$, имеем: $f_{max}=3...30$ Гц.

В естественных условиях поток акустической мощности составляет 0,3...1 мВт/м^2 [3].

Таким образом, инжектируемая в окружающую среду энергия ракетных двигателей той своей частью, которая реализуется в виде проникающего акустического излучения, будет оказывать влияние на комплектующие и бортовые системы навигационных комплексов, ухудшая их паспортные характеристики, а равно и понижая тактико-технические характеристики летных изделий в целом. Причиной этих изменений является генерируемая в механических системах комплектующих или в чувствительных элементах систем коррекции автономных навигационных систем акустическая вибрация.

Как оказалось, многие перспективные технические решения в этом случае не только не выполняют своего предназначения, но и вредят. В частности, это в полной мере относится к многофазным системам с жидкофазными элементами, которые служат прекрасным проводником звуковых волн. Причем опасность проникающего акустического поля обусловлена его пространственным характером, в отличие от кинематического или силового, проходящего внутрь фюзеляжа через опоры.

Наиболее опасными представляются условия, порождающие резонансную обстановку в механических системах [4]. К ним относятся волновое совпадение, низкочастотный резонанс, высокочастотный резонанс (выше граничной частоты) [5]. Представляет интерес тот факт, что при значительном волновом размере, намного большем единицы, аналитическая структура явлений для оболочечных фрагментов практически совпадает с математической моделью пластин [6].

Анализ литературных данных и постановка проблемы

Можно считать первыми исследованиями влияния звуковых волн на пластины принадлежащими by ld. Rayleigh. Затем, взаимодействие звуковых волн с оболочками изучалось, например, в работе [7]. Динамика плоской панели в акустическом поле выхлопной струи рассмотрена в работе [8]. Выносливость авиационных конструкций при акустическом нагружении исследована в работе [9]. Акустические измерения систематизированы в работе [10]. Отражение звука тонкими пластинами и оболочками в жидкости исследовано в работе [11].

Влияние ударной волны изучалось, например, в работе [12], особенности сверхзвукового полета ЛА анализировались в работе [13].

Проанализировано влияние гауссовой кривизны на упругую податливость конструкции в акустическом поле в работе [14]. Трансляция акустической вибрации на инерционные сенсоры ЛА изучалась в работе [15].

Таким образом, для дальнейшего изучения природы упругого взаимодействия пластинчатых элементов с акустическим излучением необходимо более конкретизировано проанализировать вынужденную вибрацию поверхности и характер ее развития в пространстве и во времени.

Объект, цель и задачи исследований

В качестве объекта исследований выбран процесс упругого взаимодействия звуковых волн с круглой пластиной в эксплуатационных условиях летных изделий.

Целью исследований служит выявление риска проявления особенностей резонансного типа.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- построить такую аналитическую модель явления, когда структура акустической вибрации пластины в достаточной мере отражалась бы приближенными решениями;
- установить границы возникновения особенностей возмущенного движения пластины.

Нестационарное взаимодействие звуковых волн с пластиной

Нестационарное взаимодействие с акустическим полем приведет к периодическому изменению фазы колебаний пластины и, следовательно, к изменению направления движения ее плоскости. Частота этого изменения определяется частотой ω падающей волны.

В случае нестационарного упругого взаимодействия, дифференциальные уравнения возмущенного движения пластины можно записать в форме Софи Жермен [16]

$$\Delta^2 W(x,y,t)+\frac{\rho h}{D}\ddot{W}(x,y,t)=\frac{1}{D}q(x,y,t)\,, \quad (1)$$

где $\frac{\rho\pi}{D}=\mathrm{const}$; t — время;

$\Delta^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\overset{\mathrm{def}}{=}A$ — итерированный лапласиан;

$D=\frac{Eh}{12(1-\sigma)}$, ρ, h и σ — цилиндрическая жесткость, плотность материала пластины, толщина и коэффициент Пуассона, соответственно.

Зададим правую часть этого уравнения следующим образом —

$$\frac{1}{D}q(x,y,t)=f(x,y)\exp i\omega t\,, \quad (2)$$

где $\omega=\mathrm{const}$, а ограничения на величину этого параметра уточним впоследствии.

Решение уравнения (1) ищем в виде [17]

$$W(x,y,t)=\rho(x,y)\exp i\omega t\,. \quad (3)$$

Множитель $\rho(x,y)$, который не зависит от времени t, назовем амплитудой изгибных колебаний [18].

Подставляя выражение (3) в исходное уравнение (1), получаем

$$\Delta^2\rho(x,y)-\omega_\Pi\rho(x,y)=f(x,y)\,, \qquad (4)$$

где $\omega_\Pi=\dfrac{\rho\pi}{D}\omega^2=\text{const}$.

Найдем приближенные решения в форме [19]:

$$\rho(x,y)=c^i u_i(x,y), \quad i=\overline{1,N}\,. \qquad (5)$$

Столбец

$$C=(c^1,\ \ c^2\ \ \ldots\ \ c^N)^T \qquad (6)$$

подлежит определению.

Подстановка соотношения (5) в уравнение (4) приводит к приближенному равенству

$$Ac^i u_i(x,y)-\omega_\Pi c^i u_i(x,y)\approx f(x,y)\,, \qquad (7)$$

для которого столбец (6) считается наиболее подходящим в том смысле, чтобы проекции левой и правой частей выражения (7) на линейную оболочку V^N образов координатных функций были бы равны.

Умножив обе части равенства (7) на величину

$$\nu_j(x,y)=Au_j(x,y), \quad j=\overline{1,N}\,,$$

получаем [20]:

$$\left[(\nu_i,\nu_j)-\omega_\Pi(u_i,u_j)\right]c^j=(f,\nu_j)^{\text{def}}=f_j, \quad i,j=\overline{1,N} \qquad (8)$$

Матрица Грама образов координатных функций

$$G=(g_{ij}), \quad g_{ij}=(\nu_i,\nu_j)$$

найдена ранее и уже описана формулой [21].

Столбец $F=\left(f_1\ \ f_2\ \ \ldots\ \ f_N\right)^T$ также найден [20]. Таким образом, остается составить матрицу

$$B=(b_{ij}), \quad b_{ij}=(u_i,\nu_j), \quad i,j=\overline{1,N}\,, \qquad (9)$$

которую назовем матрицей Грама координатных функций $u_i(x,y)$ по энергии оператора A. После вычислений, получаем –

$$B=(b_{ij})=(u_i\nu_j)=$$

$$=\frac{8\pi}{15R^2}\begin{Vmatrix}40&0&0&5&5&0\\0&15&0&0&0&0\\0&0&15&0&0&0\\5&0&0&7&1&0\\5&0&0&1&7&0\\0&0&0&0&0&3\end{Vmatrix}. \qquad (10)$$

Зная матрицу Грама образов координатных функций и матрицу Грама B координатных функций по энергии оператора A (10), систему (8) можно представить иначе –

$$(G-\omega_\Pi B)C=F\,. \qquad (11)$$

Если $\det(G-\omega_\Pi B)\neq 0$, то эта система однозначно разрешима, то есть

$$C=(G-\omega_\Pi B)^{-1}F\,, \qquad (12)$$

и можно приступить к построению приближенного решения уравнения (4) в форме (5).

Так как матрица B неособенная (невырожденная), то

$$\det(G-\omega_\Pi B)=\det B(B^{-1}G-\omega_\Pi I)\,,$$

где I – единичная матрица. Тогда

$$\det(G-\omega_\Pi B)=(\det B)\det(B^{-1}G-\omega_\Pi I)\,;$$

$$\det(G-\omega_\Pi B)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(B^{-1}G-\omega_\Pi I)=0\,.$$

Но $\det(B^{-1}G-\omega_\Pi I)$ есть многочлен степени N относительно ω_Π. Если ω_0 является положительным корнем этого уравнения, тогда система (11) может оказаться неразрешимой.

Проанализируем этот факт подробнее. Считаем для простоты уравнение однородным –

$$\Delta^2 k^2 W+\ddot{W}=0\,, \qquad (13)$$

где $0<k=\sqrt{\dfrac{D}{ph}}=\text{const}$, при однородных граничных условиях.

Ненулевые решения ищем в виде –

$$W=Z(x,y)T(t)\,, \qquad (14)$$

где множитель $Z(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям.

Подставляя решение (14) в уравнение (13), получаем:

$$\frac{\Delta^2 Z}{Z}+\frac{\ddot{T}}{k^2T}=0 \Rightarrow \frac{\Delta^2 Z}{Z}=\lambda=\text{const} \Rightarrow AZ=\lambda Z\,, \qquad (15)$$

где $A=\Delta^2$. Тогда, получаем –

$$\ddot{T}+\lambda k^2 T=0\,. \qquad (16)$$

Приближенное решение задачи (15) будем отыскивать в виде –

$$Z(x,y)=c^i u_i(x,y), \quad i=\overline{1,6}, \qquad (17)$$

где $u_i(x,y)$ - координатные функции.

После подстановки выражения (17) в соотношение (15), получаем приближенное равенство [22, 23]

$$Ac^i u_i(x,y) \approx \lambda c^i u_i(x,y) \qquad (18)$$

с неизвестным столбцом $C = (c^1,\ \ c^2\ \ \ldots\ \ c^6)^T$.

Как и ранее, наилучшим считаем столбец, при котором проекции левой и правой частей выражения (18) на линейную оболочку V^N образов координатных функций будут равны друг другу, то есть

$$GC = \lambda BC \ \ \Rightarrow\ \ (G - \lambda B)C = 0 .$$

Столбец C не должен быть нулевым, поэтому

$$\det(G - \lambda B) = 0 .$$

Из положительной определенности оператора A вытекает, что $0 < \lambda$, а, значит, $\lambda = \omega_\Pi$ есть положительные корни многочлена $\det(B^{-1}G - \omega_\Pi I)$. В нашей задаче они представляются приближенными собственными числами оператора $A = \Delta^2$.

Принимая во внимание, что $\lambda = \omega_\Pi > 0$, из выражения (16) находим:

$$T = a\cos(k\sqrt{\omega_\Pi}\,t) + b\sin(k\sqrt{\omega_\Pi}\,t) .$$

Это значит, что в принятом приближении собственные частоты подчиняются соотношениям –

$$k\sqrt{\omega_\Pi} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}}\cdot\omega\cdot\sqrt{\frac{\rho h}{D}} = \omega .$$

Следовательно, чтобы задача (4), т.е. задача нахождения вынужденных колебаний пластины, была разрешимой, необходимо исключить возможность совпадения частот плотности возмущающего акустического воздействия и собственной частоты. Другими словами, следует избежать частотного резонанса.

Если ограничиться рассмотрением только первых трех координатных функций

$$u_1 = \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right)^2 ; \quad u_2 = \frac{x}{R}u_1 ; \quad u_3 = \frac{y}{R}u_1$$

и их образов

$$V_1 = \frac{64}{R^4} = \text{const} ; \ V_2 = \frac{192}{R^5}x ; \ V_3 = \frac{192}{R^5}y ,$$

тогда матрица $G - \omega_\Pi B$ окажется диагональной –

$$G - \omega_\Pi B = \begin{Vmatrix} \frac{4^6\pi}{R^6} - \frac{320\pi}{15R^2}\omega & & \\ & \frac{4^5 9\pi}{R^6} - \frac{8\pi}{R^2}\omega & \\ & & \frac{4^5 9\pi}{R^6} - \frac{8\pi}{R^2}\omega \end{Vmatrix} . \qquad (19)$$

Нули ее определителя будут проявляться только при условии, когда

$$\omega_{\Pi 1} = \frac{3\cdot 2^6}{R^4} ; \ \ \omega_{\Pi 2} = \omega_{\Pi 3} = \frac{9\cdot 2^7}{R^4} .$$

И, при этом, обязательно с одновременным выполнением соотношения $\dfrac{\omega_{\Pi 2}}{\omega_{\Pi 1}} = 6$.

Обсуждение результатов исследований

Анализ показывает, что для разрешения задачи нахождения вынужденных колебаний пластины, необходимо исключить саму возможность совпадения плотности акустического воздействия и плотности собственных колебаний пластины.

Наилучшим считается столбец матрицы, когда она является невырожденной. Если ограничиться рассмотрением только первых трех координатных функций и их образов, тогда матрица превращается в диагональную и легко определяются нули ее определителя.

Выводы

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

Нестационарное взаимодействие круглой пластины с акустическим полем приводит к изменению направления и фазы вынужденных колебаний пластины. Аналитическое представление этого явления достаточно полно отражается дифференциальными уравнениями в форме Софи Жермен.

Приближенные решения в матричной форме определяются матрицей Грама координатных функций по энергии итерированного лапласиана. Эти решения позволяют для ненулевых корней при удовлетворении граничных условий, установить собственные числа итерированного лапласиана. Это создает возможность для очертания риска проявления частотного резонанса по нулям определителя диагональной матрицы для трех координатных функций.

Установлены два значения резонансных частот, но с одновременным выполнением также их взаимной численной связи. Таким образом, очерчены границы проявления особенностей вынужденного движения пластины в звуковом поле.

Аналитическая модель допускает искать как приближенные решения, так и точные решения дифференциальных уравнений пластин, что позволяет установить правомерность предпочтения приближенному решению.

Литература

1. Зарембо Л. К. Введение в нелинейную акустику [Текст] / Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. – М. : Наука, 1966. – 520 с.

2. Губкин К. Е. Распространения взрывных волн [Текст] / К. Е. Губкин // Механика в СССР за 50 лет. Т.2 : Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1970. – С. 269-311.

3. Пономарев Е. А. Инфразвуковые волны в атмосфере Земли (обзор) [Текст] / Е. А. Пономарев, А. И. Ерущенков // Изв. вузов. Радиофизика. – 1977. – Т.20, № 12. – С. 1773-1789.

4. Бойко Г. В. Можливість утворення звуковою хвилею низькочастотного резонансу в поплавковому гіроскопі [Текст] / Г. В. Бойко // Технологический аудит и резервы производства. – 2014. – № 6/4 (2). – С. 10-12.

5. Бойко Г. В. Резонанс совпадения в условиях гиперзвукового полета [Текст] / Г. В. Бойко // Космічна наука і технологія. – 2014. – Т. 20, №3. – С. 28-33.

6. Шибецкий В. Ю. Нелінійні коливання поплавкового підвісу під дією N-хвилі. Циклічне навантаження [Текст] / В. Ю. Шибецкий // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – №6/9 (66). – С. 22-25.

7. Reissner E. On some aspects of the theory of thin elastic shells [Text] / E. Reissner // J. Boston Soc. Civ. Engrs., 1955. – №42. – P. 39-48.

8. Валеев К. Г. Определение напряженного состояния плоской панели в акустическом поле выхлопной струи [Текст] / К. Г. Валеев, В. Е. Квитка // Прикладная механика. – 1970. – № 4. – С. 39-43.

9. Выносливость авиационных конструкций при акустических нагрузках [Текст] ; под ред. Л. П. Лепоринской. – М. : Изд-во ЦАГИ, 1967. - 149 с.

10. Блинова Л. П. Акустические измерения [Текст] / Л. П. Блинова, А. Е. Колесников, Л. Б. Ланганс. – М. : Наука, 1971. – 189 с.

11. Лямшев Л. М. Отражение звука тонкими пластинами и оболочками в жидкости [Текст] / Л. М. Лямшев. – М. : Изд-во АН СССР, 1955. – 73 с.

12. Косова В. П. Вплив ударної хвилі на газові бульбашки сенсора [Текст] / В. П. Косова // Materialy VIII Miedzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji «WYKSZTALCENIE I NAUKA BEZ GRANIC-2012», 07–15 grudnia 2012 roku. – Przemyl : Nauka i studia, 2012. – Vol. 35. – С. 79–81.

13. Косова В.П. Надзвуковий політ і похибки поплавкового гіроскопа [Текст] / В.П. Косова // Матеріали VIII международної научно-практичної конференції «Achievement of high school-2012», 17-25 November, 2012. – Т. 26. – София, «Бял ГРАД-БГ» ООД, 2012. – С. 30-32.

14. Шибецкий В. Ю. Влияние гауссовой кривизны подвеса поплавкового гироскопа на упругую податливость в акустическом поле [Текст] / В. Ю. Шибецкий // Молодой ученый. – 2012. – №12. – С. 116-120.

15. Shybetskiy V. Errors of threeorthogonal coordinate systems construction on aircraft [Text] / V. Shybetskiy // Young Scientist USA. Applied science. – 2014. – V. 5. – P. 95-99.

16. Karachun V. V. Vibration of a plate under an acoustic load [Text] / V. V. Karachun // Soviet Applied Mechanics; Year: 1988-11-01; Vol. 24; Issue 11. – P. 1110-1115; EID: 2-s2.0-0024667525; Scopus ID: 0024667525; DOI: 10.1007/BF00889149.

17. Karachun V. V. Special features of the state of stress and strain of plates with finite dimensions under acoustic load [Text] / V. V. Karachun // Strength of Materials; Year: 1990-10-01; Vol. 22; Issue 10. – P. 1512-1516; EID: 2-s2.0-0026170749; Scopus ID: 0026170749;DOI: 10.1007/BF00767241.

18. Mel'nik V. N. Some aspects of the gyroscopic stabilization in acoustic fields [Text] / V. N. Mel'nik, V. V. Karachun // Prikladnaya Mekhanika; Year: 2002-01-01; Vol. 38; Issue 1. – P. 95-101; EID: 2-s2.0-0036409560; Scopus ID: 0036409560.

19. Mel'nik V. N. Influence of acoustic radiation on the sensors of a gyrostabilized platform [Text] / V. N. Mel'nik, V. V. Karachun // International Applied Mechanics; Year: 2004-10-01; Vol. 40; Issue 10. – P. 1164-1170; EID: 2-s2.0-14744289091; Scopus ID: 14744289091; DOI: 10.1007/s10778-004-0008-x.

20. Mel'nik V. N. Determining gyroscopic integrator errors due to diffraction of sound waves platform [Text] / V. N. Mel'nik, V. V. Karachun // Prikladnaya Mekhanika; Year: 2004-11-25; Vol. 40; Issue 3. – P. 109-120; EID: 2-s2.0-8644291743; Scopus ID: 8644291743.

21. Mel'nik V. N. Stress-strain state of a gyroscope suspension under acoustic loading platform [Text] / V. N. Mel'nik, V.V. Karachun // Strength of Materials; Year: 2007-01-01; Vol. 39; Issue 1. – P. 24-36; EID: 2-s2.0-34147198666; Scopus ID: 34147198666; DOI: 10.1007/s11223-007-0004-6.

22. Mel'nick V., The emergence of resonance within acoustic fields of the float gyroscope suspension [Text] / V. M. Mel'nick, V. V. Karachun // EasternEuropean Journal of Enterprise Technologies; Year: 2016-01-01; Vol. 1; Issue 7. – P. 39-44; EID: 2-s2.0-84960858488; Scopus ID: 84960858488; DOI: 10.15587/1729-4061.2016.59892.

23. Karachun V. V. A three-dimensional problem on the dynamics of a suspension of afloated gyroscope [Text] / V.V.Karachun, Ya.F.Kayuk, V.N.Mel'nik // Strength of Materials; Year: 2008-07-24; Vol.40; Issue 3. – P. 321-333; EID: 2-s2.0-49249122680; Scopus ID: 49249122680; DOI: 10.1007/s11223-008-9013-3.

Поступила в редакцию 17.05.2016

В.М. Мельник, Г.В. Бойко. Виникнення акустичної вібрації в коловій пластині. Нестаціонарна задача

В роботі будується аналітична модель пружної взаємодії звукової хвилі експлуатаційного використання льотного виробу з коловою пластиною. Наведена можливість отримання наближеного рішення і визначення по його структурі характера згинного руху колової пластини для експлуатаційних умов літальних виробів . Розкривається можливість прояву резонансних особливостей пластини в звуковому полі. Створені умови для аналізу динаміки пластини в широкому діапазоні натурних умов функціонування у складі високошвидкістних та маневрених об'єктів,в тому числі,крилатих ракет.

Ключові слова: *матриця координатних функцій, кругла пластина, частотний резонанс.*

V.M. Mel'nick, G.V. Boiko. Ariseacoustic vibration in a circular plate. The unsteady problem

In work,we construct an analytical model of elastic interaction of the sound wave operational use of flight products with a round plate. The possibility of obtaining an approximate solution and determination in his character structure of the bending of a circular plate motion for the operating conditions of flight products. Reveals the possibility of existence of resonance characteristics of the plate in the sound field. The prerequisites for the analysis of dynamics of plates in a wide range of field conditions of functioning in the part of highly maneuverable and high-speed objects, including cruise missiles.

Key words: *the matrix of coordinate functions,circular plate,resonance frequency.*